Uma breve introdução á Análise Estocástica

Outline

- Motivação
- Espaço de probabilidade, variável aleatória
- Processo estocástico
- Movimento browniano
- Martingale
- Formula de Itô
- Equações diferenciais estocásticas (em finanças)
- Equações diferenciais estocásticas regressivas (em expressão genetica)

Motivação

A taxa de câmbio € / \$ em cada ponto fixo t pode ser considerado como uma variável aleatória, e a coleção de taxas de câmbio X_t, $t \in [2008, 2013]$, pode ser considerada um processo estocástico.

Princípios Básicos do Cálculo Estocástico

Variável aleatória

- Um exemplo de experimento aleatório é o lançamento de uma moeda: os resultados possíveis "cara" ou "coroa" não são previsíveis e aparecem de acordo com um mecanismo aleatório.

Princípios Básicos do Cálculo Estocástico

Variável aleatória

- Um exemplo de experimento aleatório é o lançamento de uma moeda: os resultados possíveis "cara" ou "coroa" não são previsíveis e aparecem de acordo com um mecanismo aleatório.
- Se nós atribuirmos o valor 1 à "cara" e o valor 0 à "coroa", obtemos uma variável aleatória X no espaço $\Omega = \{\text{cara,coroa}\}$ que toma valores 1 e 0.

Princípios Básicos do Cálculo Estocástico

Variável aleatória

- Um exemplo de experimento aleatório é o lançamento de uma moeda: os resultados possíveis "cara" ou "coroa" não são previsíveis e aparecem de acordo com um mecanismo aleatório.
- Se nós atribuirmos o valor 1 à "cara" e o valor 0 à "coroa", obtemos uma variável aleatória X no espaço $\Omega = \{\text{cara,coroa}\}$ que toma valores 1 e 0.
- Seja $\mathcal{F}$ a σ-álgebra de Ω: $\mathcal{F} = \{\varnothing, \{\text{cara}\}, \{\text{coroa}\}, \Omega\}$.

Princípios Básicos do Cálculo Estocástico

Variável aleatória

- Um exemplo de experimento aleatório é o lançamento de uma moeda: os resultados possíveis "cara" ou "coroa" não são previsíveis e aparecem de acordo com um mecanismo aleatório.
- Se nós atribuirmos o valor 1 à "cara" e o valor 0 à "coroa", obtemos uma variável aleatória X no espaço $\Omega = \{\text{cara,coroa}\}$ que toma valores 1 e 0.
- Seja $\mathcal{F}$ a σ-álgebra de Ω: $\mathcal{F} = \{\varnothing, \{\text{cara}\}, \{\text{coroa}\}, \Omega\}$.
- Definimos a probabilidade P: $P\{\text{cara}\} = \frac{1}{2}$ e $P\{\text{coroa}\} = \frac{1}{2}$.

Princípios Básicos do Cálculo Estocástico

Variável aleatória

- Uma tripla $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, onde Ω é um conjunto, $\mathcal{F}$ é uma σ-álgebra de conjuntos de Ω, e $\mathbb{P}$ é uma medida de probablidade em $\mathcal{F}$, é chamada de **espaço de probabilidade**.

Princípios Básicos do Cálculo Estocástico

Variável aleatória

- Uma tripla $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, onde Ω é um conjunto, $\mathcal{F}$ é uma σ-álgebra de conjuntos de Ω, e $\mathbb{P}$ é uma medida de probablidade em $\mathcal{F}$, é chamada de **espaço de probabilidade**.

- Dizemos que a função $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ é uma **variável aleatória** se ela é uma função mensurável.

Princípios Básicos do Cálculo Estocástico

Variável aleatória

- Uma tripla $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, onde Ω é um conjunto, $\mathcal{F}$ é uma σ-álgebra de conjuntos de Ω, e $\mathbb{P}$ é uma medida de probablidade em $\mathcal{F}$, é chamada de **espaço de probabilidade**.

- Dizemos que a função $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ é uma **variável aleatória** se ela é uma função mensurável.

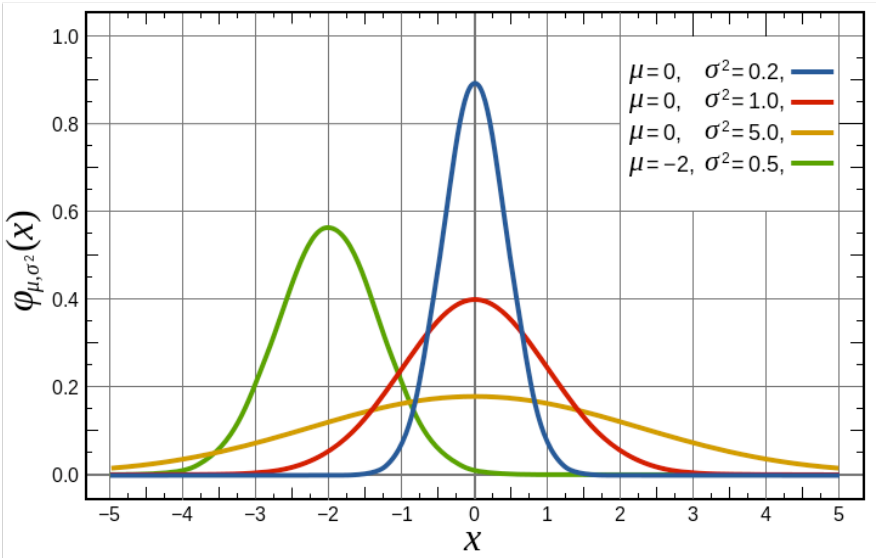
- A medida $P_X(B) = \mathbb{P} \circ X^{-1}(B) = \mathbb{P}(X \in B) = \mathbb{P}(\{\omega : X(\omega) \in B\})$ em $\mathbb{R}^n$ (ou seja, $B \subset \mathbb{R}^n$) é chamada de **distribuição** da variável aleatória X.

Examplo: **Variável aleatória Gaussiana**.

Uma variável aleatória X é dita Gaussiana se sua distribuição $P_X = \mathbb{P} \circ X^{-1}$ é uma **medida Gaussiana**, ou seja, se

$P_X(A) = \int_A p(x)dx$, onde $p(x) = \frac{1}{|2\pi\Sigma|^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^T\Sigma^{-1}(x-\mu)}$

é a densidade Gaussiana com **média** μ e **matriz de covariância** Σ.



Princípios Básicos do Cálculo Estocástico

Processo Estocástico

- Um **processo estocástico** é uma coleção de variáveis aleatórias $\{X_t(\omega)\}$, onde $t \in [0, \infty)$ ou $t \in [0, T]$.

Princípios Básicos do Cálculo Estocástico

Processo Estocástico

- Um **processo estocástico** é uma coleção de variáveis aleatórias $\{X_t(\omega)\}$, onde $t \in [0, \infty)$ ou $t \in [0, T]$.

- Consequentamente, um processo estocástico X_t é uma função de duas variáveis: $t \in [0, \infty)$ e $\omega \in \Omega$:

$$X_t = X_t(\omega) = X(t, \omega).$$

- O **movimento browniano** pode ser definido como movimento aleatório de partículas microscópicas imersas em um fluido.

Movimento browniano

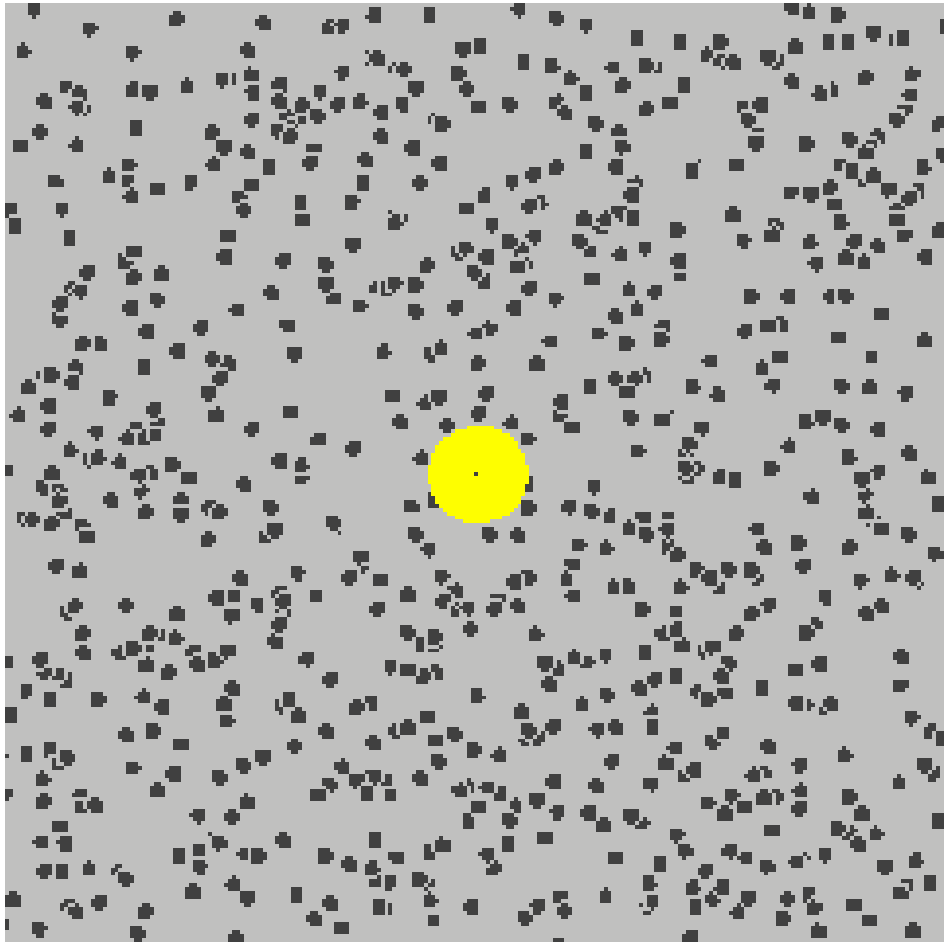
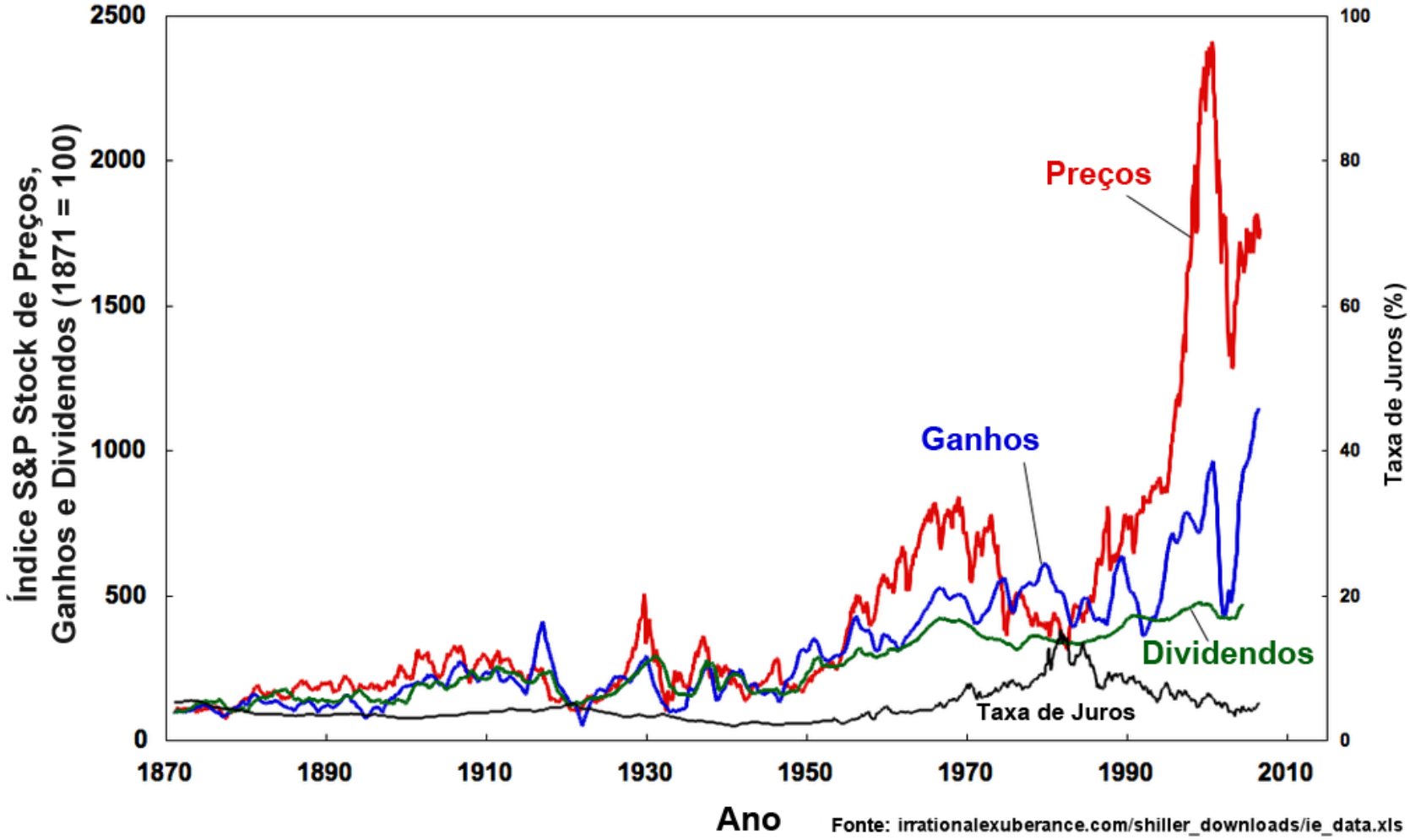


Figure: Simulação de um movimento browniano

Movimento Browniano B_t , $t \geqslant 0$, é um processo estocástico contínuo com as seguintes propriedades:

- $B_0 = 0$
- Os incrementos $B_{t_1} - B_{t_2}$, $B_{t_3} - B_{t_4}$, ... $B_{t_{n-1}} - B_{t_n}$ são independentes para todos $t_1 < t_2 \leqslant \ldots \leqslant t_n$.
- Para todos $0 \leqslant s < t$, o incremento $B_t - B_s$ é uma variável aleatória Gaussiana com média zero, i.e., $\mathbb{E}[B_t - B_s] = 0$, e variância $t - s$, i.e., $\mathbb{E}[(B_t - B_s)^2] = t - s$.

Procéssos estocásticos em finanças



Equação quasilinear parabólica

$$\begin{cases} \partial_t u = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x,u)\partial^2_{x_i x_j} u + \sum_{i=1}^{n} b_i(t,x,u,\partial_x u)\partial_{x_i} u + c(t,x,u,\partial_x u), \\ u(0,x) = \varphi(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0. \end{cases}$$

onde $u(t,x)$ toma valores em $\mathbb{R}^m$.

Equação quasilinear parabólica

$$\begin{cases} \partial_t u = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x,u)\partial^2_{x_i x_j} u + \sum_{i=1}^{n} b_i(t,x,u,\partial_x u)\partial_{x_i} u + c(t,x,u,\partial_x u), \\ u(0,x) = \varphi(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0. \end{cases}$$

onde $u(t,x)$ toma valores em $\mathbb{R}^m$.

Uma equação desse tipo aparece frequentamente em problemas de Anaálise estocástica

Equação quasilinear parabólica

$$\begin{cases} \partial_t u = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t,x,u)\partial^2_{x_i x_j} u + \sum_{i=1}^n b_i(t,x,u,\partial_x u)\partial_{x_i} u + c(t,x,u,\partial_x u), \\ u(0,x) = \varphi(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0. \end{cases}$$

onde $u(t,x)$ toma valores em $\mathbb{R}^m$.

Uma equação desse tipo aparece frequentamente em problemas de Anaálise estocástica

Exemplo: equação de calor

$$\partial_t u = \Delta u.$$

Nesse caso, $a_{ij} = \delta_{ij}$, matriz identidade.

Princípios Básicos do Cálculo Estocástico

Esperança e esperança condicional

- A **esperança** de uma variavel aleatoria $X(\omega)$, $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$, é definida como

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\Omega} X(\omega)\, \mathbb{P}(d\omega).$$

Princípios Básicos do Cálculo Estocástico

Esperança e esperança condicional

- A **esperança** de uma variavel aleatoria $X(\omega)$, $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$, é definida como

$$\mathbb{E}[X] = \int_\Omega X(\omega)\, \mathbb{P}(d\omega).$$

- A **esperança condicional** de uma variavel aleatoria $X(\omega)$, $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$, em relação a uma σ-algebra $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$ de subconjuntos de Ω é uma variável aleatória, denotada por $\mathbb{E}[X|\mathcal{A}]$, mensurável em relação a $\mathcal{A}$ e tal que

$$\int_A X(\omega)\, \mathbb{P}(d\omega) = \int_A \mathbb{E}[X|\mathcal{A}](\omega)\, \mathbb{P}(d\omega) \qquad \forall A \in \mathcal{A}.$$

Princípios Básicos do Cálculo Estocástico

Filtração e processos adaptados

- Uma família crescente $\{\mathcal{F}_t\}$ de sub-σ-algebras de $\mathcal{F}$ é chamada uma **filtação** se para todos $0 \leqslant s < t < \infty$, $\boldsymbol{\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}}$.

Princípios Básicos do Cálculo Estocástico

Filtração e processos adaptados

- Uma família crescente $\{\mathcal{F}_t\}$ de sub-σ-algebras de $\mathcal{F}$ é chamada uma **filtação** se para todos $0 \leqslant s < t < \infty$, $\boldsymbol{\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}}$.

- A filtração pode ser vista como um fluxo crescente de informação.

Princípios Básicos do Cálculo Estocástico

Filtração e processos adaptados

- Uma família crescente $\{\mathcal{F}_t\}$ de sub-σ-algebras de $\mathcal{F}$ é chamada uma **filtação** se para todos $0 \leqslant s < t < \infty$, $\boldsymbol{\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}}$.
- A filtração pode ser vista como um fluxo crescente de informação.
- Processo estocástico X_t é chamado **adaptado** com respeito a $\mathcal{F}_t$ se para cada t, X_t é $\mathcal{F}_t$-mensurável.

- Um processo $\mathcal{F}_t$-adaptado M_t é chamado um **martingale** se $E|M_t| < \infty$

$$\text{e} \quad E\left[M_t \,|\, \mathcal{F}_s\right] = M_s \quad \text{para todos} \quad s \leqslant t.$$

- Um processo $\mathcal{F}_t$-adaptado M_t é chamado um **martingale** se $E|M_t| < \infty$

$$\text{e} \quad E\left[M_t \,|\, \mathcal{F}_s\right] = M_s \quad \text{para todos} \quad s \leqslant t.$$

- Exemplo: Movimento browniano é um martingale.

- Um processo $\mathcal{F}_t$-adaptado M_t é chamado um **martingale** se $E|M_t| < \infty$

$$\text{e} \quad E\left[M_t \,|\, \mathcal{F}_s\right] = M_s \quad \text{para todos} \quad s \leqslant t.$$

- Exemplo: Movimento browniano é um martingale.
- $\mathbb{E}|B_t| = \int_\Omega |B_t| \mathbb{P}(d\omega) \leqslant \left(\int_\Omega |B_t|^2 \mathbb{P}(d\omega) \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\mathbb{E}|B_t|^2} = \sqrt{t}$
- $\mathbb{E}[B_t|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[B_s|\mathcal{F}_s] + \mathbb{E}[B_t - B_s|\mathcal{F}_s] = B_s.$

- Um processo $\mathcal{F}_t$-adaptado M_t é chamado um **martingale** se $E|M_t| < \infty$

$$\text{e} \quad E\left[M_t \,|\, \mathcal{F}_s\right] = M_s \quad \text{para todos} \quad s \leqslant t.$$

- Exemplo: Movimento browniano é um martingale.
- $\mathbb{E}|B_t| = \int_\Omega |B_t| \mathbb{P}(d\omega) \leqslant \left(\int_\Omega |B_t|^2 \mathbb{P}(d\omega) \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\mathbb{E}|B_t|^2} = \sqrt{t}$
- $\mathbb{E}[B_t|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[B_s|\mathcal{F}_s] + \mathbb{E}[B_t - B_s|\mathcal{F}_s] = B_s.$

Como B_s é $\mathcal{F}_s$-mensuravel e $B_t - B_s$ é independende de $\mathcal{F}_s$.

Integral Estocástica

Definimos a **integral estocástica** $\int_0^T H_t dB_t$ com relação a um movimento browniano B_t (Integral de Itô).

- Lembramos que uma integral de Riemann-Stieltjes é definida como $\int_0^T f(t)dg(t) = \lim \sum_{i=1}^n f(t_i)(g(t_i) - g(t_{i-1}))$

Integral Estocástica

Definimos a **integral estocástica** $\int_0^T H_t dB_t$ com relação a um movimento browniano B_t (Integral de Itô).

- Lembramos que uma integral de Riemann-Stieltjes é definida como $\int_0^T f(t)dg(t) = \lim \sum_{i=1}^n f(t_i)(g(t_i) - g(t_{i-1}))$
- O primeiro passo é definir uma integral estocástica $\int_0^T H_t dB_t$ para processos estocásticos simples $H_t = H_0 \mathbb{I}_{\{0\}} + \sum_{i=1}^{n-1} H_{t_i} \mathbb{I}_{(t_i, t_{i+1}]}$,

Integral Estocástica

Definimos a **integral estocástica** $\int_0^T H_t dB_t$ com relação a um movimento browniano B_t (Integral de Itô).

- Lembramos que uma integral de Riemann-Stieltjes é definida como $\int_0^T f(t)dg(t) = \lim \sum_{i=1}^n f(t_i)(g(t_i) - g(t_{i-1}))$
- O primeiro passo é definir uma integral estocástica $\int_0^T H_t dB_t$ para processos estocásticos simples $H_t = H_0 \mathbb{I}_{\{0\}} + \sum_{i=1}^{n-1} H_{t_i} \mathbb{I}_{(t_i, t_{i+1}]}$,
- Para os processos estocásticos simples a integral estocástica é definida como

$$\int_0^T H_t dB_t = \sum_{i=1}^{n-1} H_{t_i}(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})$$

Integral Estocástica

- No caso geral, a integral estocástica é o limite em

$$I(0,T) := \int_0^T H_t dB_t = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} H_{t_i}(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) =: \lim_{N\to\infty} S_N \quad \text{em} \quad L_2(\Omega).$$

desde que $\sup_i(t_{i+1} - t_i) \to 0$ quando $N \to \infty$.

Integral Estocástica

- No caso geral, a integral estocástica é o limite em

$$I(0,T) := \int_0^T H_t dB_t = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} H_{t_i}(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) =: \lim_{N\to\infty} S_N \quad \text{em} \quad L_2(\Omega).$$

desde que $\sup_i(t_{i+1} - t_i) \to 0$ quando $N \to \infty$.

- Ou seja,

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{E}|I(0,T) - S_N|^2 = \lim_{N\to\infty} \int_\Omega |I(0,T)(\omega) - S_N(\omega)|^2 P(d\omega) = 0.$$

Propriedades da integral de Itô

- $\int_S^T f(t,\omega)dB_t = \int_S^U f(t,\omega)dB_t + \int_U^T f(t,\omega)dB_t$
- $\int_S^T (\alpha f + \beta g)dB_t = \alpha \int_S^T f dB_t + \beta \int_S^T g dB_t$
- $\mathbb{E} \int_S^T f(t,\omega)dB_t = 0$
- $\int_0^t f(s,\omega)dB_s$ é adaptado em relação à filtração $\mathcal{F}_t = \sigma\{B_s, 0 \leqslant s \leqslant t\}$.

Formula de Itô

Teorema

Seja X_t um processo estocástico de tipo Itô

$$X_t = \int_0^t u_s ds + \int_0^t v_s dB_s$$

e seja $g(t,x) \in \mathrm{C}^2([0,+\infty) \times \mathbb{R})$. Definimos,

$$Y_t = g(t, X_t).$$

Então,

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t \left(\partial_s g(t, X_t) + u_s\, \partial_x g(s, X_s) + \frac{1}{2}\partial_x^2 g(s, X_s) v_s^2\right) ds + \int_0^t \partial_x g(s, X_s) u_s dB_s.$$

Equações diferenciais estocásticas (EDEs)

- Uma EDE é uma equação diferencial cujos termos são processos estocásticos, e como resultado, uma solução também é um processo estocástico.

Equações diferenciais estocásticas (EDEs)

- Uma EDE é uma equação diferencial cujos termos são processos estocásticos, e como resultado, uma solução também é um processo estocástico.
- Uma EDE tem a seguinte forma:

$$\underbrace{\dot{X}_t = f(t, X_t)}_{\text{EDO}} + \underbrace{\sigma(t, X_t)\dot{B}_t}_{\text{ruído}}, \qquad X_0 = x.$$

Equações diferenciais estocásticas (EDEs)

- Uma EDE é uma equação diferencial cujos termos são processos estocásticos, e como resultado, uma solução também é um processo estocástico.
- Uma EDE tem a seguinte forma:

$$\underbrace{\dot{X}_t = f(t, X_t)}_{\text{EDO}} + \underbrace{\sigma(t, X_t)\dot{B}_t}_{\text{ruído}}, \quad X_0 = x.$$

- X_t é uma **solução em** $[0, T]$ se para todo $t \in [0, T]$,

$$X_t = x + \underbrace{\int_0^t f(s, X_s)ds}_{\text{integral de Riemann}} + \underbrace{\int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s}_{\text{integral estocástica}}$$

Equações diferenciais estocásticas (EDEs)

- Uma EDE é uma equação diferencial cujos termos são processos estocásticos, e como resultado, uma solução também é um processo estocástico.
- Uma EDE tem a seguinte forma:

$$\underbrace{\dot{X}_t = f(t, X_t)}_{\text{EDO}} + \underbrace{\sigma(t, X_t)\dot{B}_t}_{\text{ruído}}, \quad X_0 = x.$$

- X_t é uma **solução em** $[0, T]$ se para todo $t \in [0, T]$,

$$X_t = x + \underbrace{\int_0^t f(s, X_s)ds}_{\text{integral de Riemann}} + \underbrace{\int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s}_{\text{integral estocástica}}$$

- Quando $\sigma = 0$, obtemos uma EDO clássica. Então, EDE é um objeto mais geral.

Mercados financeiros

Modelo de Black-Scholes

- O processo de preço de ação S_t satisfaz a seguinte EDE (EDE de Black-Scholes)

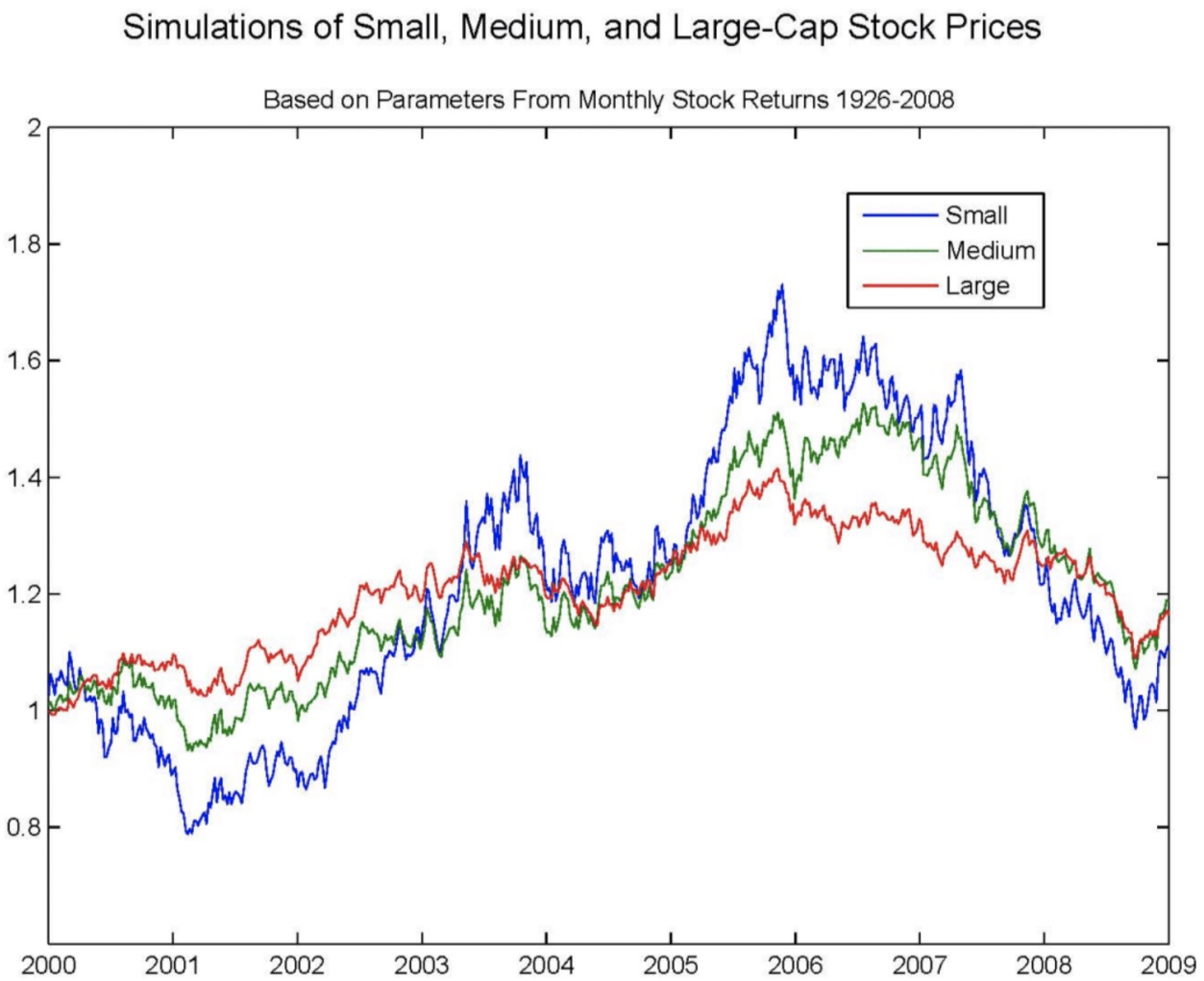
$$dS_t = \mu S_t \, dt + \sigma S_t dB_t,$$

onde B_t é o movimento browniano, $\mu > 0$ e $\sigma > 0$ são constantes, onde a ultima é chamada volatilidade de ações, e a solução é

$$S_t = S_0 \exp\{(\mu - \sigma^2/2)t + \sigma B_t\} \quad \text{movimento browniano geometrico}$$

Mercados financeiros

Modelo de Black-Scholes



Equações diferenciais estocásticas em expressão genetica

- Equação diferencial estocástica (EDE) regressiva

$$Y_t = \xi + \int_t^T g(s, Y_s, Z_s)ds + \int_t^T Z_s dB_s,$$

é um analogo do problema de valor final para EDOs.

Equações diferenciais estocásticas em expressão genetica

- Equação diferencial estocástica (EDE) regressiva

$$Y_t = \xi + \int_t^T g(s, Y_s, Z_s)ds + \int_t^T Z_s dB_s,$$

é um analogo do problema de valor final para EDOs.

- ξ é uma variabel aleatória mensurável com respeito a σ-álgebra gerada por B_T.

Equações diferenciais estocásticas em expressão genetica

- Equação diferencial estocástica (EDE) regressiva

$$Y_t = \xi + \int_t^T g(s, Y_s, Z_s)ds + \int_t^T Z_s dB_s,$$

é um analogo do problema de valor final para EDOs.

- ξ é uma variabel aleatória mensurável com respeito a σ-álgebra gerada por B_T.
- A solução é um par (Y_t, Z_t) mensurável com respeito a σ-álgebra gerada por variáveis aleatórios B_s, $0 \leqslant s \leqslant t$.

Equações diferenciais estocásticas em expressão genetica

- Equação diferencial estocástica (EDE) regressiva

$$Y_t = \xi + \int_t^T g(s, Y_s, Z_s)ds + \int_t^T Z_s dB_s,$$

é um analogo do problema de valor final para EDOs.

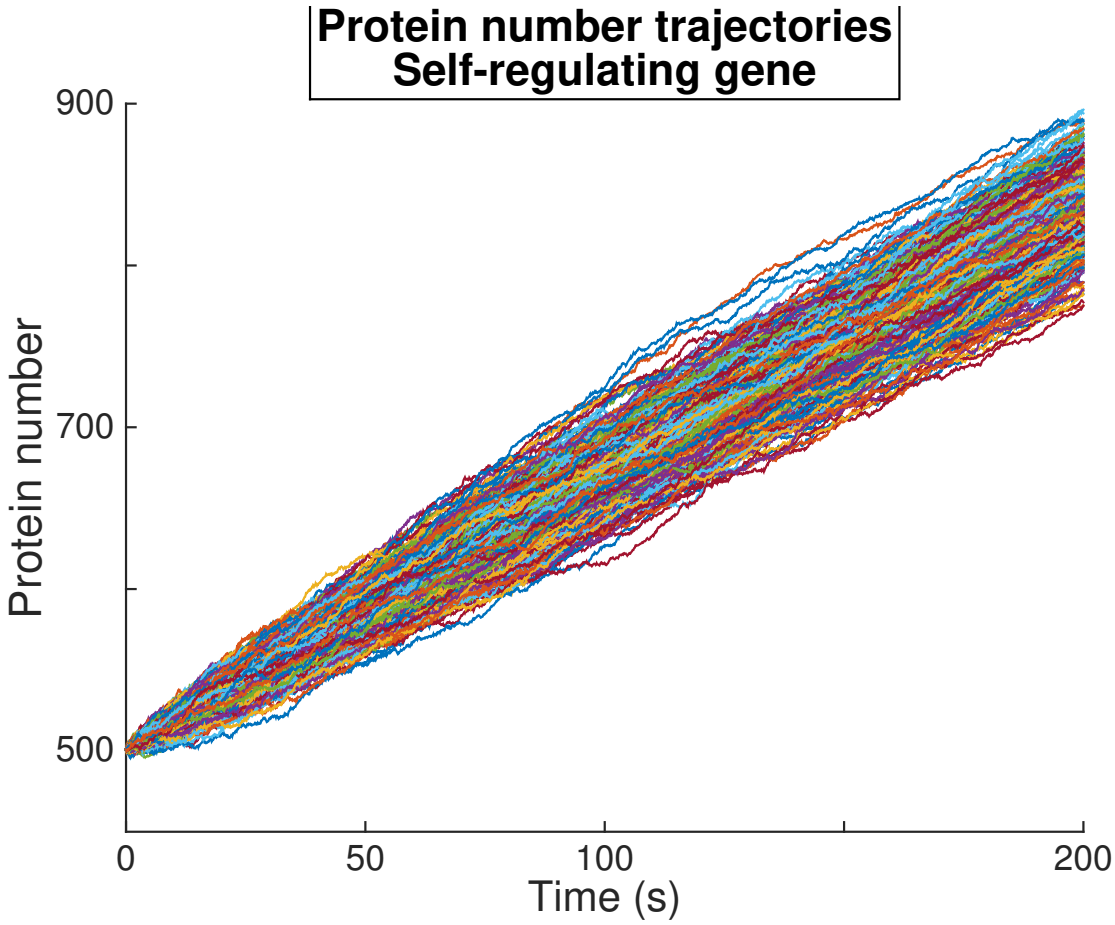
- ξ é uma variabel aleatória mensurável com respeito a σ-álgebra gerada por B_T.
- A solução é um par (Y_t, Z_t) mensurável com respeito a σ-álgebra gerada por variáveis aleatórios B_s, $0 \leqslant s \leqslant t$.
- A EDE regressíva pode ser utilizada em modelagem do expressão genetica.

Equações diferenciais estocásticas em expressão genetica

- Equação diferencial estocástica (EDE) regressiva

$$Y_t = \xi + \int_t^T g(s, Y_s, Z_s)ds + \int_t^T Z_s dB_s,$$

é um analogo do problema de valor final para EDOs.

- ξ é uma variabel aleatória mensurável com respeito a σ-álgebra gerada por B_T.
- A solução é um par (Y_t, Z_t) mensurável com respeito a σ-álgebra gerada por variáveis aleatórios B_s, $0 \leqslant s \leqslant t$.
- A EDE regressíva pode ser utilizada em modelagem do expressão genetica.
- Y_t é o número de proteínas expressas por um gene, f é taxa de síntese e degradação de proteínas.

Equações diferenciais estocásticas em expressão genetica