

# Os 5 sólidos platônicos e a busca pelo número de retas numa superfície projetiva

Sally Andria Vieira da Silva (UFF)  
e  
Jacqueline Fabiola Rojas Arancibia (UFPB)

**ESCOLA DE VERÃO 2021**  
DM-UFPB

**AULA 5**, 10 de fevereiro de 2021

## Da última vez.

Na aula 4 consideramos a superfície

$$\mathcal{S}_\phi = \mathcal{Z}(\phi(x, y) - \phi(z, t)) \subset \mathbb{P}^3$$

com

$$\phi(u, v) = (a_1 v - b_1 u) \cdot (a_2 v - b_2 u) \cdots (a_d v - b_d u) \in \mathbb{C}[u, v]$$

tal que  $\mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(\phi) = \{[a_1 : b_1], \dots, [a_d : b_d]\}$  consiste de  $d$  pontos distintos.

## Da última vez.

Na aula 4 consideramos a superfície

$$\mathcal{S}_\phi = \mathcal{Z}(\phi(x, y) - \phi(z, t)) \subset \mathbb{P}^3$$

com

$$\phi(u, v) = (a_1 v - b_1 u) \cdot (a_2 v - b_2 u) \cdots (a_d v - b_d u) \in \mathbb{C}[u, v]$$

tal que  $\mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(\phi) = \{[a_1 : b_1], \dots, [a_d : b_d]\}$  consiste de  $d$  pontos distintos.

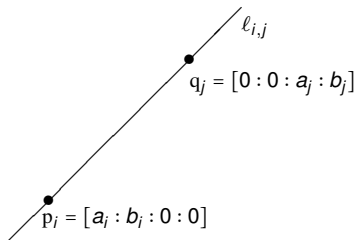
Ao fixar a reta  $L = \mathcal{Z}(z, t)$ , obtivemos a partição

$$\left\{ \text{retas contidas em } \mathcal{S}_\phi \right\} = \underbrace{\left\{ \ell \subset \mathcal{S}_\phi \mid \ell \cap L \neq \emptyset \right\}}_{=\mathcal{L}_\phi} \cup \underbrace{\left\{ \ell \subset \mathcal{S}_\phi \mid \ell \cap L = \emptyset \right\}}_{=\mathcal{L}'_\phi}.$$

## Mostramos que

$$\mathcal{L}_\phi = \{ \ell_{i,j} \mid 1 \leq i, j \leq d \}$$

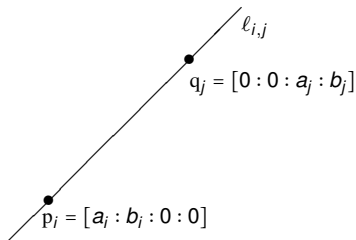
sendo  $\ell_{i,j}$  a reta que passa pelos pontos  $p_i = [a_i : b_i : 0 : 0]$  e  $q_j = [0 : 0 : a_j : b_j]$  com  $i, j \in \{1, \dots, d\}$ .



## Mostramos que

$$\mathcal{L}_\phi = \{ \ell_{i,j} \mid 1 \leq i, j \leq d \}$$

sendo  $\ell_{i,j}$  a reta que passa pelos pontos  $p_i = [a_i : b_i : 0 : 0]$  e  $q_j = [0 : 0 : a_j : b_j]$  com  $i, j \in \{1, \dots, d\}$ .



De onde, concluímos que

$$n_\phi := \left| \left\{ \text{retas contidas em } \mathcal{S}_\phi \right\} \right| = |\mathcal{L}_\phi| + |\mathcal{L}'_\phi| = d^2 + |\mathcal{L}'_\phi|.$$

# FOCO DA AULA 05

Calcular  $|\mathcal{L}'_\phi|$  sendo

$$\mathcal{L}'_\phi = \left\{ \ell \subset \mathcal{S}_\phi \mid \ell \cap \mathbf{L} = \emptyset \right\} \quad e \quad \mathbf{L} = \mathcal{Z}(z, t).$$

De fato, se  $\phi(u, v) = (a_1 v - b_1 u) \cdot (a_2 v - b_2 u) \cdots (a_d v - b_d u)$

é tal que

$$C = \mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(\phi) = \{[a_1 : b_1], \dots, [a_d, b_d]\}$$

é formado por  $d$  pontos distintos da reta projetiva  $\mathbb{P}^1$ .



De fato, se  $\phi(u, v) = (a_1 v - b_1 u) \cdot (a_2 v - b_2 u) \cdots (a_d v - b_d u)$

é tal que

$$C = \mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(\phi) = \{[a_1 : b_1], \dots, [a_d, b_d]\}$$

é formado por  $d$  pontos distintos da reta projetiva  $\mathbb{P}^1$ .

Vamos mostrar que:

$$|\mathcal{L}'_{\phi}| = d \cdot |\Gamma_C|$$

sendo

$$\Gamma_C = \{\mathbf{T} \in \text{Aut}(\mathbb{P}^1) \mid \mathbf{T}(C) = C\}.$$

Lembremos que  $\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \iff \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ .

Uma função  $\mathbf{T} : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1 \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$  se, e somente se,

$$\exists \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \quad \text{tal que } \mathbf{T}([a : b]) = [\alpha \cdot a + \beta \cdot b : \gamma \cdot a + \delta \cdot b].$$

Qual é o esquema para mostrar que  $|\mathcal{L}'_\phi| = d \cdot |\Gamma_C|$ ?

Qual é o esquema para mostrar que  $|\mathcal{L}'_\phi| = d \cdot |\Gamma_C|$ ?

- Se  $\ell \in \mathcal{L}'_\phi$ , então  $\ell$  induz um automorfismo  $\mathbf{T}_\ell \in \Gamma_C$  sendo  $C = \mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(\phi)$ .

Qual é o esquema para mostrar que  $|\mathcal{L}'_\phi| = d \cdot |\Gamma_C|$ ?

- Se  $\ell \in \mathcal{L}'_\phi$ , então  $\ell$  induz um automorfismo  $\mathbf{T}_\ell \in \Gamma_C$  sendo  $C = \mathbb{Z}_{\mathbb{P}^1}(\phi)$ .

Defina

$$\Omega : \mathcal{L}'_\phi \longrightarrow \Gamma_C \quad \text{por} \quad \ell \longmapsto \mathbf{T}_\ell.$$

Qual é o esquema para mostrar que  $|\mathcal{L}'_\phi| = d \cdot |\Gamma_C|$ ?

- Se  $\ell \in \mathcal{L}'_\phi$ , então  $\ell$  induz um automorfismo  $\mathbf{T}_\ell \in \Gamma_C$  sendo  $C = \mathbb{Z}_{\mathbb{P}^1}(\phi)$ .

Defina

$$\Omega : \mathcal{L}'_\phi \longrightarrow \Gamma_C \quad \text{por} \quad \ell \longmapsto \mathbf{T}_\ell.$$

- A função  $\Omega$  é sobrejetora.

Qual é o esquema para mostrar que  $|\mathcal{L}'_\phi| = d \cdot |\Gamma_C|$ ?

- Se  $\ell \in \mathcal{L}'_\phi$ , então  $\ell$  induz um automorfismo  $\mathbf{T}_\ell \in \Gamma_C$  sendo  $C = \mathbb{Z}_{\mathbb{P}^1}(\phi)$ .

Defina

$$\Omega : \mathcal{L}'_\phi \longrightarrow \Gamma_C \quad \text{por} \quad \ell \longmapsto \mathbf{T}_\ell.$$

- A função  $\Omega$  é sobrejetora.
- $|\Omega^{-1}(\mathbf{T})| = d$  para todo  $\mathbf{T} \in \Gamma_C$ .

Qual é o esquema para mostrar que  $|\mathcal{L}'_\phi| = d \cdot |\Gamma_C|$ ?

- Se  $\ell \in \mathcal{L}'_\phi$ , então  $\ell$  induz um automorfismo  $\mathbf{T}_\ell \in \Gamma_C$  sendo  $C = \mathbb{Z}_{\mathbb{P}^1}(\phi)$ .

Defina

$$\Omega : \mathcal{L}'_\phi \longrightarrow \Gamma_C \quad \text{por} \quad \ell \longmapsto \mathbf{T}_\ell.$$

- A função  $\Omega$  é sobrejetora.
- $|\Omega^{-1}(\mathbf{T})| = d$  para todo  $\mathbf{T} \in \Gamma_C$ .

---

Lembremos que:  $\Omega^{-1}(\mathbf{T}) = \{\ell \in \mathcal{L}'_\phi \mid \Omega(\ell) = \mathbf{T}\}.$



$\Omega : \mathcal{L}'_{\phi} \longrightarrow \Gamma_C$  sobrejetora tal que  $|\Omega^{-1}(\mathbf{T})| = d$  para todo  $\mathbf{T} \in \Gamma_C$ .

implica em

$$|\mathcal{L}'_{\phi}| = d \cdot |\Gamma_C|.$$

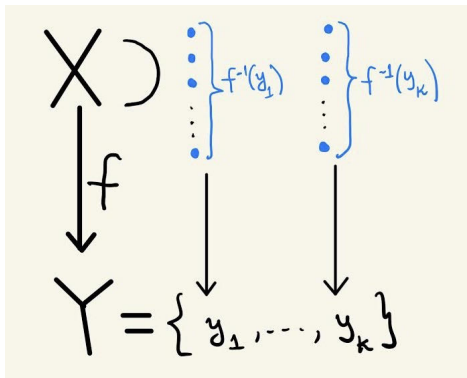
$\Omega : \mathcal{L}'_{\phi} \longrightarrow \Gamma_C$  sobrejetora tal que  $|\Omega^{-1}(\mathbf{T})| = d$  para todo  $\mathbf{T} \in \Gamma_C$ .

implica em

$$|\mathcal{L}'_{\phi}| = d \cdot |\Gamma_C|.$$

Visto que:

Se  $f : X \longrightarrow Y$  for uma função sobrejetora, com  $X$  e  $Y$  finitos então



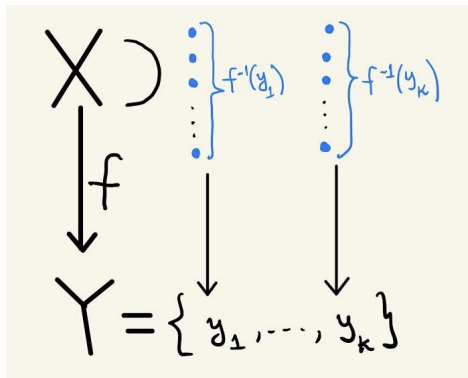
$\Omega : \mathcal{L}'_{\phi} \longrightarrow \Gamma_C$  sobrejetora tal que  $|\Omega^{-1}(\mathbf{T})| = d$  para todo  $\mathbf{T} \in \Gamma_C$ .

implica em

$$|\mathcal{L}'_{\phi}| = d \cdot |\Gamma_C|.$$

Visto que:

Se  $f : X \longrightarrow Y$  for uma função sobrejetora, com  $X$  e  $Y$  finitos então



$$|X| = |f^{-1}(y_1)| + \dots + |f^{-1}(y_k)|.$$

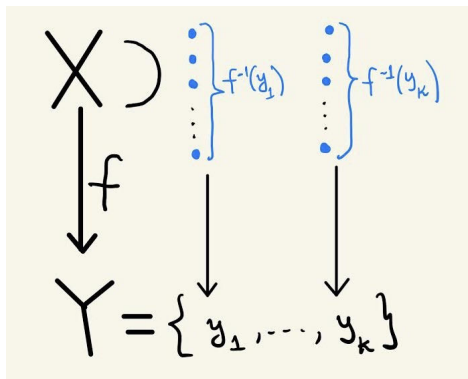
$\Omega : \mathcal{L}'_{\phi} \longrightarrow \Gamma_C$  sobrejetora tal que  $|\Omega^{-1}(\mathbf{T})| = d$  para todo  $\mathbf{T} \in \Gamma_C$ .

implica em

$$|\mathcal{L}'_{\phi}| = d \cdot |\Gamma_C|.$$

Visto que:

Se  $f : X \longrightarrow Y$  for uma função sobrejetora, com  $X$  e  $Y$  finitos então



$$|X| = |f^{-1}(y_1)| + \dots + |f^{-1}(y_k)|.$$

Se

$$|f^{-1}(y_1)| = \dots = |f^{-1}(y_k)| = d$$

então

$$|X| = d \cdot k = d \cdot |Y|.$$

## Vamos definir o automorfismo $T_\ell$

Considere  $\phi(u, v) = (a_1 v - b_1 u) \cdot (a_2 v - b_2 u) \cdots (a_d v - b_d u)$  tal que

$$C = \mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(\phi) = \left\{ [a_1 : b_1], \dots, [a_d : b_d] \right\}$$

é constituído por  $d$  pontos distintos da reta projetiva  $\mathbb{P}^1$ .

## Vamos definir o automorfismo $\mathbf{T}_\ell$

Considere  $\phi(u, v) = (a_1 v - b_1 u) \cdot (a_2 v - b_2 u) \cdots (a_d v - b_d u)$  tal que

$$C = \mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(\phi) = \{[a_1 : b_1], \dots, [a_d, b_d]\}$$

é constituído por  $d$  pontos distintos da reta projetiva  $\mathbb{P}^1$ .

**Proposição 1:** Se  $\ell \in \mathcal{L}'_\phi$ , então  $\ell$  induz um automorfismo  $\mathbf{T}_\ell \in \Gamma_C$ .

## Vamos definir o automorfismo $\mathbf{T}_\ell$

Considere  $\phi(u, v) = (a_1 v - b_1 u) \cdot (a_2 v - b_2 u) \cdots (a_d v - b_d u)$  tal que

$$C = \mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(\phi) = \{[a_1 : b_1], \dots, [a_d, b_d]\}$$

é constituído por  $d$  pontos distintos da reta projetiva  $\mathbb{P}^1$ .

**Proposição 1:** Se  $\ell \in \mathcal{L}'_\phi$ , então  $\ell$  induz um automorfismo  $\mathbf{T}_\ell \in \Gamma_C$ .

**Demonstração:**

## Vamos definir o automorfismo $T_\ell$

Considere  $\phi(u, v) = (a_1 v - b_1 u) \cdot (a_2 v - b_2 u) \cdots (a_d v - b_d u)$  tal que

$$C = \mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(\phi) = \left\{ [a_1 : b_1], \dots, [a_d, b_d] \right\}$$

é constituído por  $d$  pontos distintos da reta projetiva  $\mathbb{P}^1$ .

**Proposição 1:** Se  $\ell \in \mathcal{L}'_\phi$ , então  $\ell$  induz um automorfismo  $T_\ell \in \Gamma_C$ .

**Demonstração:** Sendo  $\ell$  uma reta em  $\mathbb{P}^3$ , existem  $f_1$  e  $f_2$  polinômios homogêneos de grau 1 (e L.I.) em  $\mathbb{C}[x, y, z, t]$  tais que

$$\ell = \mathcal{Z}(f_1, f_2).$$



## Vamos definir o automorfismo $T_\ell$

Considere  $\phi(u, v) = (a_1 v - b_1 u) \cdot (a_2 v - b_2 u) \cdots (a_d v - b_d u)$  tal que

$$C = \mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(\phi) = \{[a_1 : b_1], \dots, [a_d, b_d]\}$$

é constituído por  $d$  pontos distintos da reta projetiva  $\mathbb{P}^1$ .

**Proposição 1:** Se  $\ell \in \mathcal{L}'_\phi$ , então  $\ell$  induz um automorfismo  $T_\ell \in \Gamma_C$ .

**Demonstração:** Sendo  $\ell$  uma reta em  $\mathbb{P}^3$ , existem  $f_1$  e  $f_2$  polinômios homogêneos de grau 1 (e L.I.) em  $\mathbb{C}[x, y, z, t]$  tais que

$$\ell = \mathcal{Z}(f_1, f_2).$$

Assuma que

$$f_1 = a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 t \quad e \quad f_2 = a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 t.$$

## Vamos definir o automorfismo $T_\ell$

Considere  $\phi(u, v) = (a_1 v - b_1 u) \cdot (a_2 v - b_2 u) \cdots (a_d v - b_d u)$  tal que

$$C = \mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(\phi) = \{[a_1 : b_1], \dots, [a_d, b_d]\}$$

é constituído por  $d$  pontos distintos da reta projetiva  $\mathbb{P}^1$ .

**Proposição 1:** Se  $\ell \in \mathcal{L}'_\phi$ , então  $\ell$  induz um automorfismo  $T_\ell \in \Gamma_C$ .

**Demonstração:** Sendo  $\ell$  uma reta em  $\mathbb{P}^3$ , existem  $f_1$  e  $f_2$  polinômios homogêneos de grau 1 (e L.I.) em  $\mathbb{C}[x, y, z, t]$  tais que

$$\ell = \mathcal{Z}(f_1, f_2).$$

Assuma que

$$f_1 = a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 t \quad e \quad f_2 = a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 t.$$

Assim, ao considerarmos a reta  $L = \mathcal{Z}(z, t)$  segue que

$$\ell \cap L = \mathcal{Z}(f_1, f_2, z, t) = \mathcal{Z}(a_1 x + b_1 y, a_2 x + b_2 y, z, t).$$

## FATO ...

Se  $f_1, \dots, f_k$  são homogêneos não constantes  $\mathbb{C}[x, y, z, t]$  com  $k \geq 4$ , então verifica-se que

$$\mathcal{Z}(f_1, \dots, f_k) = \emptyset \iff \left\{ \begin{array}{l} \text{a única solução do sistema } f_1 = 0, \dots, f_k = 0 \\ \text{em } \mathbb{C}^4 \text{ for a origem.} \end{array} \right.$$

FATO ...

Se  $f_1, \dots, f_k$  são homogêneos não constantes  $\mathbb{C}[x, y, z, t]$  com  $k \geq 4$ , então verifica-se que

$$\mathcal{Z}(f_1, \dots, f_k) = \emptyset \iff \left\{ \begin{array}{l} \text{a única solução do sistema } f_1 = 0, \dots, f_k = 0 \\ \text{em } \mathbb{C}^4 \text{ for a origem.} \end{array} \right.$$

Por hipótese  $\ell \in \mathcal{L}'_\phi = \left\{ \ell \subset \mathcal{S}_\phi \mid \ell \cap L = \emptyset \right\}$ .

FATO ...

Se  $f_1, \dots, f_k$  são homogêneos não constantes  $\mathbb{C}[x, y, z, t]$  com  $k \geq 4$ , então verifica-se que

$$\mathcal{Z}(f_1, \dots, f_k) = \emptyset \iff \begin{cases} \text{a única solução do sistema } f_1 = 0, \dots, f_k = 0 \\ \text{em } \mathbb{C}^4 \text{ for a origem.} \end{cases}$$

Por hipótese  $\ell \in \mathcal{L}'_\phi = \{\ell \subset \mathcal{S}_\phi \mid \ell \cap L = \emptyset\}$ . Logo,

$$\ell \cap L = \mathcal{Z}(f_1, f_2, z, t) = \mathcal{Z}(a_1x + b_1y, a_2x + b_2y, z, t) = \emptyset.$$

FATO ...

Se  $f_1, \dots, f_k$  são homogêneos não constantes  $\mathbb{C}[x, y, z, t]$  com  $k \geq 4$ , então verifica-se que

$$\mathcal{Z}(f_1, \dots, f_k) = \emptyset \iff \begin{cases} \text{a única solução do sistema } f_1 = 0, \dots, f_k = 0 \\ \text{em } \mathbb{C}^4 \text{ for a origem.} \end{cases}$$

Por hipótese  $\ell \in \mathcal{L}'_\phi = \{\ell \subset \mathcal{S}_\phi \mid \ell \cap L = \emptyset\}$ . Logo,

$$\ell \cap L = \mathcal{Z}(f_1, f_2, z, t) = \mathcal{Z}(a_1x + b_1y, a_2x + b_2y, z, t) = \emptyset.$$

Assim, segue do fato acima que a única solução do sistema

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = 0 \\ a_2x + b_2y = 0 \\ z = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

é  $x=y=z=t=0$ .

FATO ...

Se  $f_1, \dots, f_k$  são homogêneos não constantes  $\mathbb{C}[x, y, z, t]$  com  $k \geq 4$ , então verifica-se que

$$\mathcal{Z}(f_1, \dots, f_k) = \emptyset \iff \begin{cases} \text{a única solução do sistema } f_1 = 0, \dots, f_k = 0 \\ \text{em } \mathbb{C}^4 \text{ for a origem.} \end{cases}$$

Por hipótese  $\ell \in \mathcal{L}'_\phi = \{\ell \subset \mathcal{S}_\phi \mid \ell \cap L = \emptyset\}$ . Logo,

$$\ell \cap L = \mathcal{Z}(f_1, f_2, z, t) = \mathcal{Z}(a_1x + b_1y, a_2x + b_2y, z, t) = \emptyset.$$

Assim, segue do fato acima que a única solução do sistema

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = 0 \\ a_2x + b_2y = 0 \\ z = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

é  $x=y=z=t=0$ . De onde concluímos que  $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \neq 0$ .

Assim, o sistema de equações que definem a reta  $\ell = \mathcal{Z}(f_1, f_2)$ ,

$$\begin{cases} f_1 = a_1x + b_1y + c_1z + d_1t = 0, \\ f_2 = a_2x + b_2y + c_2z + d_2t = 0. \end{cases} \iff \begin{cases} x = \alpha z + \beta t, \\ y = \gamma z + \delta t. \end{cases}$$

para certos  $\alpha, \beta, \gamma$  e  $\delta$  em  $\mathbb{C}$ .



Assim, o sistema de equações que definem a reta  $\ell = \mathcal{Z}(f_1, f_2)$ ,

$$\begin{cases} f_1 = a_1x + b_1y + c_1z + d_1t = 0, \\ f_2 = a_2x + b_2y + c_2z + d_2t = 0. \end{cases} \iff \begin{cases} x = \alpha z + \beta t, \\ y = \gamma z + \delta t. \end{cases}$$

para certos  $\alpha, \beta, \gamma$  e  $\delta$  em  $\mathbb{C}$ .

Logo,  $\ell = \mathcal{Z}(\alpha z + \beta t - x, \gamma z + \delta t - y)$  e

$$\ell \cap M = \mathcal{Z}(\alpha z + \beta t, \gamma z + \delta t, x, y) \quad \text{se} \quad M = \mathcal{Z}(x, y).$$

Assim, o sistema de equações que definem a reta  $\ell = \mathcal{Z}(f_1, f_2)$ ,

$$\begin{cases} f_1 = a_1x + b_1y + c_1z + d_1t = 0, \\ f_2 = a_2x + b_2y + c_2z + d_2t = 0. \end{cases} \iff \begin{cases} x = \alpha z + \beta t, \\ y = \gamma z + \delta t. \end{cases}$$

para certos  $\alpha, \beta, \gamma$  e  $\delta$  em  $\mathbb{C}$ .

Logo,  $\ell = \mathcal{Z}(\alpha z + \beta t - x, \gamma z + \delta t - y)$  e

$$\ell \cap M = \mathcal{Z}(\alpha z + \beta t, \gamma z + \delta t, x, y) \quad \text{se} \quad M = \mathcal{Z}(x, y).$$

Por outro lado, na aula passada comentamos que:  $\ell \cap L = \emptyset \iff \ell \cap M = \emptyset$ .

Assim, o sistema de equações que definem a reta  $\ell = \mathcal{Z}(f_1, f_2)$ ,

$$\begin{cases} f_1 = a_1x + b_1y + c_1z + d_1t = 0, \\ f_2 = a_2x + b_2y + c_2z + d_2t = 0. \end{cases} \iff \begin{cases} x = \alpha z + \beta t, \\ y = \gamma z + \delta t. \end{cases}$$

para certos  $\alpha, \beta, \gamma$  e  $\delta$  em  $\mathbb{C}$ .

Logo,  $\ell = \mathcal{Z}(\alpha z + \beta t - x, \gamma z + \delta t - y)$  e

$$\ell \cap M = \mathcal{Z}(\alpha z + \beta t, \gamma z + \delta t, x, y) \quad \text{se} \quad M = \mathcal{Z}(x, y).$$

Por outro lado, na aula passada comentamos que:  $\ell \cap L = \emptyset \iff \ell \cap M = \emptyset$ .

Logo,  $\ell \cap M = \emptyset$ ,

Assim, o sistema de equações que definem a reta  $\ell = \mathcal{Z}(f_1, f_2)$ ,

$$\begin{cases} f_1 = a_1x + b_1y + c_1z + d_1t = 0, \\ f_2 = a_2x + b_2y + c_2z + d_2t = 0. \end{cases} \iff \begin{cases} x = \alpha z + \beta t, \\ y = \gamma z + \delta t. \end{cases}$$

para certos  $\alpha, \beta, \gamma$  e  $\delta$  em  $\mathbb{C}$ .

Logo,  $\ell = \mathcal{Z}(\alpha z + \beta t - x, \gamma z + \delta t - y)$  e

$$\ell \cap M = \mathcal{Z}(\alpha z + \beta t, \gamma z + \delta t, x, y) \quad \text{se} \quad M = \mathcal{Z}(x, y).$$

Por outro lado, na aula passada comentamos que:  $\ell \cap L = \emptyset \iff \ell \cap M = \emptyset$ .

Logo,  $\ell \cap M = \emptyset$ , o que nos leva a concluir que o sistema

$$\alpha z + \beta t = 0, \quad \gamma z + \delta t = 0, \quad x = 0, \quad y = 0.$$

só admite a origem por solução.

Assim, o sistema de equações que definem a reta  $\ell = \mathcal{Z}(f_1, f_2)$ ,

$$\begin{cases} f_1 = a_1x + b_1y + c_1z + d_1t = 0, \\ f_2 = a_2x + b_2y + c_2z + d_2t = 0. \end{cases} \iff \begin{cases} x = \alpha z + \beta t, \\ y = \gamma z + \delta t. \end{cases}$$

para certos  $\alpha, \beta, \gamma$  e  $\delta$  em  $\mathbb{C}$ .

Logo,  $\ell = \mathcal{Z}(\alpha z + \beta t - x, \gamma z + \delta t - y)$  e

$$\ell \cap M = \mathcal{Z}(\alpha z + \beta t, \gamma z + \delta t, x, y) \quad \text{se} \quad M = \mathcal{Z}(x, y).$$

Por outro lado, na aula passada comentamos que:  $\ell \cap L = \emptyset \iff \ell \cap M = \emptyset$ .

Logo,  $\ell \cap M = \emptyset$ , o que nos leva a concluir que o sistema

$$\alpha z + \beta t = 0, \quad \gamma z + \delta t = 0, \quad x = 0, \quad y = 0.$$

só admite a origem por solução. Portanto,

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \alpha \cdot \delta - \gamma \cdot \beta \neq 0.$$

Conclusão: Se  $\ell \in \mathcal{L}'_\phi$  então  $\ell = \mathcal{Z}(\alpha z + \beta t - x, \gamma z + \delta t - y)$

com  $\alpha, \beta, \gamma$  e  $\delta$  em  $\mathbb{C}$  tais que  $\alpha \cdot \delta - \gamma \cdot \beta \neq 0$ .

**Conclusão:** Se  $\ell \in \mathcal{L}'_\phi$  então  $\ell = \mathcal{Z}(\alpha z + \beta t - x, \gamma z + \delta t - y)$

com  $\alpha, \beta, \gamma$  e  $\delta$  em  $\mathbb{C}$  tais que  $\alpha \cdot \delta - \gamma \cdot \beta \neq 0$ .

Assim, a função  $\mathbf{T}_\ell : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1$  definida por

$$[r : s] \longmapsto [\alpha r + \beta s : \gamma r + \delta s]$$

é um automorfismo de  $\mathbb{P}^1$ , ou seja,  $\mathbf{T}_\ell \in \text{Aut}(\mathbb{P}^1)$ .

**Conclusão:** Se  $\ell \in \mathcal{L}'_\phi$  então  $\ell = \mathcal{Z}(\alpha z + \beta t - x, \gamma z + \delta t - y)$

com  $\alpha, \beta, \gamma$  e  $\delta$  em  $\mathbb{C}$  tais que  $\alpha \cdot \delta - \gamma \cdot \beta \neq 0$ .

Assim, a função  $\mathbf{T}_\ell : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1$  definida por

$$[r : s] \longmapsto [\alpha r + \beta s : \gamma r + \delta s]$$

é um automorfismo de  $\mathbb{P}^1$ , ou seja,  $\mathbf{T}_\ell \in \text{Aut}(\mathbb{P}^1)$ .

A seguir mostraremos que  $\mathbf{T}_\ell(C) = C$  se,  $C = \mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(\phi)$ .



**Conclusão:** Se  $\ell \in \mathcal{L}'_\phi$  então  $\ell = \mathcal{Z}(\alpha z + \beta t - x, \gamma z + \delta t - y)$

com  $\alpha, \beta, \gamma$  e  $\delta$  em  $\mathbb{C}$  tais que  $\alpha \cdot \delta - \gamma \cdot \beta \neq 0$ .

Assim, a função  $\mathbf{T}_\ell : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1$  definida por

$$[r : s] \longmapsto [\alpha r + \beta s : \gamma r + \delta s]$$

é um automorfismo de  $\mathbb{P}^1$ , ou seja,  $\mathbf{T}_\ell \in \text{Aut}(\mathbb{P}^1)$ .

A seguir mostraremos que  $\mathbf{T}_\ell(C) = C$  se,  $C = \mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(\phi)$ .

- Note que para todo  $[r : s] \in \mathbb{P}^1$  tem-se que

$$[\alpha r + \beta s : \gamma r + \delta s : r : s] \in \ell \subset \mathcal{S}_\phi = \mathcal{Z}(\phi(x, y) - \phi(z, t)).$$

**Conclusão:** Se  $\ell \in \mathcal{L}'_\phi$  então  $\ell = \mathcal{Z}(\alpha z + \beta t - x, \gamma z + \delta t - y)$

com  $\alpha, \beta, \gamma$  e  $\delta$  em  $\mathbb{C}$  tais que  $\alpha \cdot \delta - \gamma \cdot \beta \neq 0$ .

Assim, a função  $\mathbf{T}_\ell : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1$  definida por

$$[r : s] \longmapsto [\alpha r + \beta s : \gamma r + \delta s]$$

é um automorfismo de  $\mathbb{P}^1$ , ou seja,  $\mathbf{T}_\ell \in \text{Aut}(\mathbb{P}^1)$ .

A seguir mostraremos que  $\mathbf{T}_\ell(C) = C$  se,  $C = \mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(\phi)$ .

- Note que para todo  $[r : s] \in \mathbb{P}^1$  tem-se que

$$[\alpha r + \beta s : \gamma r + \delta s : r : s] \in \ell \subset \mathcal{S}_\phi = \mathcal{Z}(\phi(x, y) - \phi(z, t)).$$

Logo,

$$\underbrace{\phi(\alpha r + \beta s, \gamma r + \delta s)}_{=\mathbf{T}_\ell([r:s])} = \phi(r, s) \implies \mathbf{T}_\ell(C) \subseteq C.$$

**Conclusão:** Se  $\ell \in \mathcal{L}'_\phi$  então  $\ell = \mathcal{Z}(\alpha z + \beta t - x, \gamma z + \delta t - y)$

com  $\alpha, \beta, \gamma$  e  $\delta$  em  $\mathbb{C}$  tais que  $\alpha \cdot \delta - \gamma \cdot \beta \neq 0$ .

Assim, a função  $\mathbf{T}_\ell : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1$  definida por

$$[r : s] \longmapsto [\alpha r + \beta s : \gamma r + \delta s]$$

é um automorfismo de  $\mathbb{P}^1$ , ou seja,  $\mathbf{T}_\ell \in \text{Aut}(\mathbb{P}^1)$ .

A seguir mostraremos que  $\mathbf{T}_\ell(C) = C$  se,  $C = \mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(\phi)$ .

- Note que para todo  $[r : s] \in \mathbb{P}^1$  tem-se que

$$[\alpha r + \beta s : \gamma r + \delta s : r : s] \in \ell \subset \mathcal{S}_\phi = \mathcal{Z}(\phi(x, y) - \phi(z, t)).$$

Logo,

$$\underbrace{\phi(\alpha r + \beta s, \gamma r + \delta s)}_{=\mathbf{T}_\ell([r:s])} = \phi(r, s) \implies \mathbf{T}_\ell(C) \subseteq C.$$

- Como  $\mathbf{T}_\ell$  é uma bijeção e  $C$  é finito, o resultado segue.

**Conclusão:** Se  $\ell \in \mathcal{L}'_\phi$  então  $\ell = \mathcal{Z}(\alpha z + \beta t - x, \gamma z + \delta t - y)$

com  $\alpha, \beta, \gamma$  e  $\delta$  em  $\mathbb{C}$  tais que  $\alpha \cdot \delta - \gamma \cdot \beta \neq 0$ .

Assim, a função  $\mathbf{T}_\ell : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1$  definida por

$$[r : s] \longmapsto [\alpha r + \beta s : \gamma r + \delta s]$$

é um automorfismo de  $\mathbb{P}^1$ , ou seja,  $\mathbf{T}_\ell \in \text{Aut}(\mathbb{P}^1)$ .

A seguir mostraremos que  $\mathbf{T}_\ell(C) = C$  se,  $C = \mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(\phi)$ .

- Note que para todo  $[r : s] \in \mathbb{P}^1$  tem-se que

$$[\alpha r + \beta s : \gamma r + \delta s : r : s] \in \ell \subset \mathcal{S}_\phi = \mathcal{Z}(\phi(x, y) - \phi(z, t)).$$

Logo,

$$\underbrace{\phi(\alpha r + \beta s, \gamma r + \delta s)}_{=\mathbf{T}_\ell([r:s])} = \phi(r, s) \implies \mathbf{T}_\ell(C) \subseteq C.$$

- Como  $\mathbf{T}_\ell$  é uma bijeção e  $C$  é finito, o resultado segue.

A seguir vamos dar um esboço da demonstração da

## Proposição 2: A função

$$\Omega : \mathcal{L}'_{\phi} \longrightarrow \Gamma_C \quad \text{dada por} \quad \ell \longmapsto \mathbf{T}_{\ell}.$$

é sobrejetora e  $|\Omega^{-1}(\mathbf{T})| = d$  para todo  $\mathbf{T} \in \Gamma_C$ .

A seguir vamos dar um esboço da demonstração da

## Proposição 2: A função

$$\Omega : \mathcal{L}'_{\phi} \longrightarrow \Gamma_C \quad \text{dada por} \quad \ell \longmapsto \mathbf{T}_{\ell}.$$

é sobrejetora e  $|\Omega^{-1}(\mathbf{T})| = d$  para todo  $\mathbf{T} \in \Gamma_C$ .

---

O ideia Eureka

---

A seguir vamos dar um esboço da demonstração da

## Proposição 2: A função

$$\Omega : \mathcal{L}'_{\phi} \longrightarrow \Gamma_C \quad \text{dada por} \quad \ell \longmapsto \mathbf{T}_{\ell}.$$

é sobrejetora e  $|\Omega^{-1}(\mathbf{T})| = d$  para todo  $\mathbf{T} \in \Gamma_C$ .

---

O ideia Eureka

---

Associar a cada  $\mathbf{T} \in \Gamma_C$  uma superfície quádrlica não singular  $Q_{\mathbf{T}}$  em  $\mathbb{P}^3$ .

$$\Gamma_C \ni \mathbf{T} \longmapsto Q_{\mathbf{T}} \subset \mathbb{P}^3.$$

---

Considere  $\mathbf{T} \in \Gamma_C$  dado por  $\mathbf{T}([r : s]) = [\alpha r + \beta s : \gamma r + \delta s]$ .



Considere  $\mathbf{T} \in \Gamma_C$  dado por  $\mathbf{T}([r : s]) = [\alpha r + \beta s : \gamma r + \delta s]$ .

Vamos associar a  $\mathbf{T}$  a superfície quádrlica  $Q_{\mathbf{T}}$  em  $\mathbb{P}^3$  dada por:

$$Q_{\mathbf{T}} = \mathcal{Z}(x(\gamma z + \delta t) - y(\alpha z + \beta t)). \quad (1)$$

Considere  $\mathbf{T} \in \Gamma_C$  dado por  $\mathbf{T}([r : s]) = [\alpha r + \beta s : \gamma r + \delta s]$ .

Vamos associar a  $\mathbf{T}$  a superfície quádrlica  $Q_{\mathbf{T}}$  em  $\mathbb{P}^3$  dada por:

$$Q_{\mathbf{T}} = \mathcal{Z}(x(\gamma z + \delta t) - y(\alpha z + \beta t)). \quad (1)$$

Fato 1:

*$Q_{\mathbf{T}}$  é uma superfície quádrlica não singular.*

Considere  $\mathbf{T} \in \Gamma_C$  dado por  $\mathbf{T}([r : s]) = [\alpha r + \beta s : \gamma r + \delta s]$ .

Vamos associar a  $\mathbf{T}$  a superfície quádrlica  $Q_{\mathbf{T}}$  em  $\mathbb{P}^3$  dada por:

$$Q_{\mathbf{T}} = \mathcal{Z}(x(\gamma z + \delta t) - y(\alpha z + \beta t)). \quad (1)$$

Fato 1:

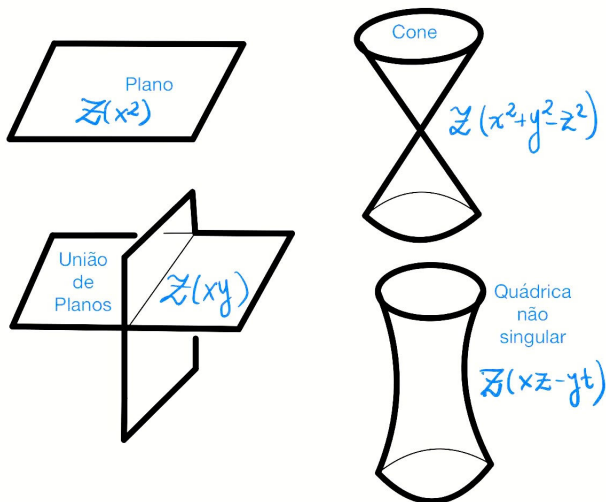
*$Q_{\mathbf{T}}$  é uma superfície quádrlica não singular.*

Ou seja, ao considerarmos  $f = x(\gamma z + \delta t) - y(\alpha z + \beta t)$  verifica-se que a única solução dos sistema

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial t} = 0.$$

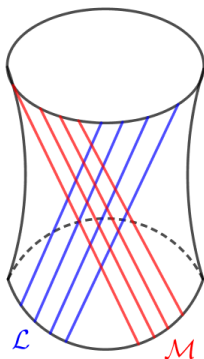
é a origem, isto é,  $x = y = z = t = 0$  ([Exercício](#)).

# As quádricas em $\mathbb{P}^3$ admitem a seguinte classificação



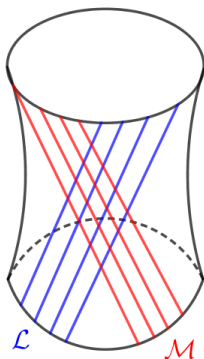
No caso de uma quádrlica não singular  $Q$  em  $\mathbb{P}^3$ .

Existem  $\mathcal{L} = \{\mathcal{L}_p\}$  e  $\mathcal{M} = \{\mathcal{M}_p\}$  famílias de retas com  $p \in \mathbb{P}^1$  tais que:



No caso de uma quádrlica não singular  $Q$  em  $\mathbb{P}^3$ .

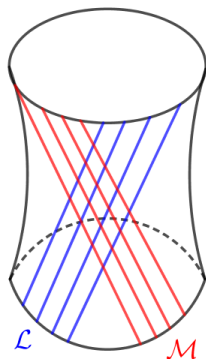
Existem  $\mathcal{L} = \{\mathcal{L}_p\}$  e  $\mathcal{M} = \{\mathcal{M}_p\}$  famílias de retas com  $p \in \mathbb{P}^1$  tais que:



- $\mathcal{L}_p \cap \mathcal{L}_q = \emptyset$  e  $\mathcal{M}_p \cap \mathcal{M}_q = \emptyset$  se,  $p \neq q$  em  $\mathbb{P}^1$ .

## No caso de uma quádrica não singular $Q$ em $\mathbb{P}^3$ .

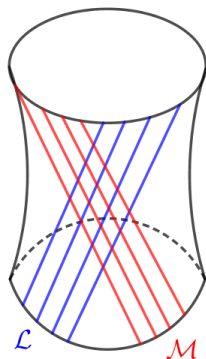
Existem  $\mathcal{L} = \{\mathcal{L}_p\}$  e  $\mathcal{M} = \{\mathcal{M}_p\}$  famílias de retas com  $p \in \mathbb{P}^1$  tais que:



- $\mathcal{L}_p \cap \mathcal{L}_q = \emptyset$  e  $\mathcal{M}_p \cap \mathcal{M}_q = \emptyset$  se,  $p \neq q$  em  $\mathbb{P}^1$ .
- $\mathcal{L}_p \cap \mathcal{M}_q$  consiste de um único ponto,  $\forall p, q \in \mathbb{P}^1$ .

## No caso de uma quádrlica não singular $Q$ em $\mathbb{P}^3$ .

Existem  $\mathcal{L} = \{\mathcal{L}_p\}$  e  $\mathcal{M} = \{\mathcal{M}_p\}$  famílias de retas com  $p \in \mathbb{P}^1$  tais que:



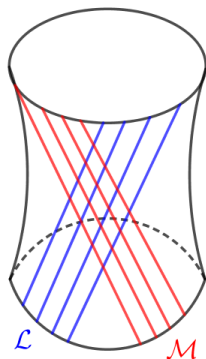
- $\mathcal{L}_p \cap \mathcal{L}_q = \emptyset$  e  $\mathcal{M}_p \cap \mathcal{M}_q = \emptyset$  se,  $p \neq q$  em  $\mathbb{P}^1$ .
- $\mathcal{L}_p \cap \mathcal{M}_q$  consiste de um único ponto,  $\forall p, q \in \mathbb{P}^1$ .
- Se  $x \in Q$  então existem únicas  $\mathcal{L}_p \in \mathcal{L}$  e  $\mathcal{M}_q \in \mathcal{M}$  tais que

$$\mathcal{L}_p \cap \mathcal{M}_q = \{x\}.$$



## No caso de uma quádrica não singular $Q$ em $\mathbb{P}^3$ .

Existem  $\mathcal{L} = \{\mathcal{L}_p\}$  e  $\mathcal{M} = \{\mathcal{M}_p\}$  famílias de retas com  $p \in \mathbb{P}^1$  tais que:



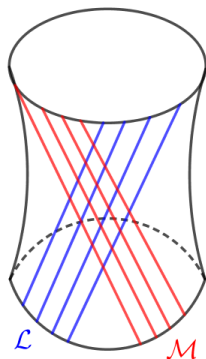
- $\mathcal{L}_p \cap \mathcal{L}_q = \emptyset$  e  $\mathcal{M}_p \cap \mathcal{M}_q = \emptyset$  se,  $p \neq q$  em  $\mathbb{P}^1$ .
- $\mathcal{L}_p \cap \mathcal{M}_q$  consiste de um único ponto,  $\forall p, q \in \mathbb{P}^1$ .
- Se  $x \in Q$  então existem únicas  $\mathcal{L}_p \in \mathcal{L}$  e  $\mathcal{M}_q \in \mathcal{M}$  tais que

$$\mathcal{L}_p \cap \mathcal{M}_q = \{x\}.$$

- $\mathcal{L} \cap \mathcal{M} = \emptyset$ .

## No caso de uma quádrlica não singular $Q$ em $\mathbb{P}^3$ .

Existem  $\mathcal{L} = \{\mathcal{L}_p\}$  e  $\mathcal{M} = \{\mathcal{M}_p\}$  famílias de retas com  $p \in \mathbb{P}^1$  tais que:



- $\mathcal{L}_p \cap \mathcal{L}_q = \emptyset$  e  $\mathcal{M}_p \cap \mathcal{M}_q = \emptyset$  se,  $p \neq q$  em  $\mathbb{P}^1$ .
- $\mathcal{L}_p \cap \mathcal{M}_q$  consiste de um único ponto,  $\forall p, q \in \mathbb{P}^1$ .
- Se  $x \in Q$  então existem únicas  $\mathcal{L}_p \in \mathcal{L}$  e  $\mathcal{M}_q \in \mathcal{M}$  tais que

$$\mathcal{L}_p \cap \mathcal{M}_q = \{x\}.$$

- $\mathcal{L} \cap \mathcal{M} = \emptyset$ .
- $\{\text{Retas em } Q\} = \mathcal{L} \cup \mathcal{M}$ .

Ao considerarmos a quádrlica  $Q_T = \mathcal{Z}(x(\gamma z + \delta t) - y(\alpha z + \beta t))$

associada a  $T \in \Gamma_C$ .

Ao considerarmos a quádrlica  $Q_T = \mathcal{Z}(x(\gamma z + \delta t) - y(\alpha z + \beta t))$

associada a  $T \in \Gamma_C$ . As famílias de retas de  $Q_T$  são dadas por:

Ao considerarmos a quádrlica  $Q_T = \mathcal{Z}(x(\gamma z + \delta t) - y(\alpha z + \beta t))$

associada a  $T \in \Gamma_C$ . As famílias de retas de  $Q_T$  são dadas por:

Família  $\mathcal{L}$ : Para cada  $y = [c : d] \in \mathbb{P}^1$ ,  $\mathcal{L}_y$  é definida pelas equações:

$$(\gamma c + \delta d)x - (\alpha c + \beta d)y = 0 \quad \text{e} \quad dz - ct = 0. \quad (2)$$

Ao considerarmos a quádrlica  $Q_T = \mathcal{Z}(x(\gamma z + \delta t) - y(\alpha z + \beta t))$

associada a  $T \in \Gamma_C$ . As famílias de retas de  $Q_T$  são dadas por:

Família  $\mathcal{L}$ : Para cada  $y = [c : d] \in \mathbb{P}^1$ ,  $\mathcal{L}_y$  é definida pelas equações:

$$(\gamma c + \delta d)x - (\alpha c + \beta d)y = 0 \quad \text{e} \quad dz - ct = 0. \quad (2)$$

Família  $\mathcal{M}$ : Para cada  $x = [a : b] \in \mathbb{P}^1$ ,  $\mathcal{M}_x$  é definida pelas equações:

$$ax = b(\alpha z + \beta t) \quad \text{e} \quad ay = b(\gamma z + \delta t). \quad (3)$$

Ao considerarmos a quádrlica  $Q_T = \mathcal{Z}(x(\gamma z + \delta t) - y(\alpha z + \beta t))$

associada a  $T \in \Gamma_C$ . As famílias de retas de  $Q_T$  são dadas por:

Família  $\mathcal{L}$ : Para cada  $y = [c : d] \in \mathbb{P}^1$ ,  $\mathcal{L}_y$  é definida pelas equações:

$$(\gamma c + \delta d)x - (\alpha c + \beta d)y = 0 \quad \text{e} \quad dz - ct = 0. \quad (2)$$

Família  $\mathcal{M}$ : Para cada  $x = [a : b] \in \mathbb{P}^1$ ,  $\mathcal{M}_x$  é definida pelas equações:

$$ax = b(\alpha z + \beta t) \quad \text{e} \quad ay = b(\gamma z + \delta t). \quad (3)$$

Note que  $\mathcal{M}_{[1:0]} = M = \mathcal{Z}(x, y)$  e  $\mathcal{M}_{[0:1]} = L = \mathcal{Z}(z, t)$ .

## Fato 2.

Seja  $\mathcal{L}$  a família de retas de  $Q_T$  em (2) e  $M = \mathcal{Z}(x, y)$ . Verifica-se que:



## Fato 2.

Seja  $\mathcal{L}$  a família de retas de  $Q_7$  em (2) e  $M = \mathcal{Z}(x, y)$ . Verifica-se que:

- (i)  $\mathcal{L}_y \cap M \neq \emptyset$  para todo  $y \in \mathbb{P}^1$ .

## Fato 2.

Seja  $\mathcal{L}$  a família de retas de  $Q_1$  em (2) e  $M = \mathcal{Z}(x, y)$ . Verifica-se que:

- (i)  $\mathcal{L}_y \cap M \neq \emptyset$  para todo  $y \in \mathbb{P}^1$ .
- (ii)  $\mathcal{L}_y \subset \mathcal{S}_\phi = \mathcal{Z}(\phi(x, y) - \phi(z, t)) \iff y \in C = \mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(\phi) = \{[a_i : b_i]\}_{i=1}^d$ .

## Fato 2.

Seja  $\mathcal{L}$  a família de retas de  $Q_1$  em (2) e  $M = \mathcal{Z}(x, y)$ . Verifica-se que:

- (i)  $\mathcal{L}_y \cap M \neq \emptyset$  para todo  $y \in \mathbb{P}^1$ .
- (ii)  $\mathcal{L}_y \subset \mathcal{S}_\phi = \mathcal{Z}(\phi(x, y) - \phi(z, t)) \iff y \in C = \mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(\phi) = \{[a_i : b_i]\}_{i=1}^d$ .

De onde concluímos que

## Fato 2.

Seja  $\mathcal{L}$  a família de retas de  $Q_1$  em (2) e  $M = \mathcal{Z}(x, y)$ . Verifica-se que:

- (i)  $\mathcal{L}_y \cap M \neq \emptyset$  para todo  $y \in \mathbb{P}^1$ .
- (ii)  $\mathcal{L}_y \subset \mathcal{S}_\phi = \mathcal{Z}(\phi(x, y) - \phi(z, t)) \iff y \in C = \mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(\phi) = \{[a_i : b_i]\}_{i=1}^d$ .

De onde concluímos que

- Se  $y \in C = \mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(\phi)$  então  $\mathcal{L}_y \in \mathcal{L}_\phi = \{\ell \mid \ell \cap L \neq \emptyset\}$ .

## Fato 2.

Seja  $\mathcal{L}$  a família de retas de  $Q_T$  em (2) e  $M = \mathcal{Z}(x, y)$ . Verifica-se que:

- (i)  $\mathcal{L}_y \cap M \neq \emptyset$  para todo  $y \in \mathbb{P}^1$ .
- (ii)  $\mathcal{L}_y \subset \mathcal{S}_\phi = \mathcal{Z}(\phi(x, y) - \phi(z, t)) \iff y \in C = \mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(\phi) = \{[a_i : b_i]\}_{i=1}^d$ .

De onde concluímos que

- Se  $y \in C = \mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(\phi)$  então  $\mathcal{L}_y \in \mathcal{L}_\phi = \{\ell \mid \ell \cap L \neq \emptyset\}$ .
- Existem  $d$  retas (distintas) da família  $\mathcal{L}$  contidas em  $Q_T \cap \mathcal{S}_\phi$ .  
Tais retas serão denotadas por

$$\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_{d-1} \subset Q_T \cap \mathcal{S}_\phi$$

### Fato 3.

*Seja  $\mathcal{M}$  a família de retas de  $Q_T$  em (3). Existem exatamente  $d$  retas (distintas) da família  $\mathcal{M}$  contidas em  $Q_T \cap S_\phi$ .*

### Fato 3.

*Seja  $\mathcal{M}$  a família de retas de  $Q_T$  em (3). Existem exatamente  $d$  retas (distintas) da família  $\mathcal{M}$  contidas em  $Q_T \cap \mathcal{S}_\phi$ .*

- Tais retas serão denotadas por

$$\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_{d-1} \subset Q_T \cap \mathcal{S}_\phi$$

- As retas  $\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_{d-1} \in \mathcal{L}'_\phi$ .

Sejam  $\mathcal{L}_0, \dots, \mathcal{L}_{d-1} \in \mathcal{L}$  e  $\mathcal{M}_0, \dots, \mathcal{M}_{d-1} \in \mathcal{M}$

as retas obtidas no Fato 2 e Fato 3, respectivamente. Verifica-se que:



Sejam  $\mathcal{L}_0, \dots, \mathcal{L}_{d-1} \in \mathcal{L}$  e  $\mathcal{M}_0, \dots, \mathcal{M}_{d-1} \in \mathcal{M}$

as retas obtidas no Fato 2 e Fato 3, respectivamente. Verifica-se que:

$$\mathcal{S}_\phi \cap Q_{\mathbf{T}} = \mathcal{L}_0 \cup \dots \cup \mathcal{L}_{d-1} \cup \mathcal{M}_0 \cup \dots \cup \mathcal{M}_{d-1} \quad e \quad \Omega(\mathcal{M}_i) = \mathbf{T}$$

sendo  $Q_{\mathbf{T}}$  é a quádrlica associada ao automorfismo  $\mathbf{T} \in \Gamma_C$  e  $\Omega: \mathcal{L}'_\phi \rightarrow \Gamma_C$  dada por  $\ell \mapsto \mathbf{T}_\ell$  com

$$\mathbf{T}_\ell([r:s]) = [\alpha r + \beta s : \gamma r + \delta s] \quad se, \ell = Z(\alpha z + \beta t - x, \gamma z + \delta t - y).$$

Sejam  $\mathcal{L}_0, \dots, \mathcal{L}_{d-1} \in \mathcal{L}$  e  $\mathcal{M}_0, \dots, \mathcal{M}_{d-1} \in \mathcal{M}$

as retas obtidas no Fato 2 e Fato 3, respectivamente. Verifica-se que:

$$\mathcal{S}_\phi \cap Q_{\mathbf{T}} = \mathcal{L}_0 \cup \dots \cup \mathcal{L}_{d-1} \cup \mathcal{M}_0 \cup \dots \cup \mathcal{M}_{d-1} \quad \text{e} \quad \Omega(\mathcal{M}_i) = \mathbf{T}$$

sendo  $Q_{\mathbf{T}}$  é a quádrlica associada ao automorfismo  $\mathbf{T} \in \Gamma_C$  e  $\Omega: \mathcal{L}'_\phi \rightarrow \Gamma_C$  dada por  $\ell \mapsto \mathbf{T}_\ell$  com

$$\mathbf{T}_\ell([r:s]) = [\alpha r + \beta s : \gamma r + \delta s] \quad \text{se, } \ell = Z(\alpha z + \beta t - x, \gamma z + \delta t - y).$$

Assim,

Sejam  $\mathcal{L}_0, \dots, \mathcal{L}_{d-1} \in \mathcal{L}$  e  $\mathcal{M}_0, \dots, \mathcal{M}_{d-1} \in \mathcal{M}$

as retas obtidas no Fato 2 e Fato 3, respectivamente. Verifica-se que:

$$\mathcal{S}_\phi \cap Q_{\mathbf{T}} = \mathcal{L}_0 \cup \dots \cup \mathcal{L}_{d-1} \cup \mathcal{M}_0 \cup \dots \cup \mathcal{M}_{d-1} \quad \text{e} \quad \Omega(\mathcal{M}_i) = \mathbf{T}$$

sendo  $Q_{\mathbf{T}}$  é a quádrlica associada ao automorfismo  $\mathbf{T} \in \Gamma_C$  e  $\Omega: \mathcal{L}'_\phi \rightarrow \Gamma_C$  dada por  $\ell \mapsto \mathbf{T}_\ell$  com

$$\mathbf{T}_\ell([r:s]) = [\alpha r + \beta s : \gamma r + \delta s] \quad \text{se, } \ell = Z(\alpha z + \beta t - x, \gamma z + \delta t - y).$$

Assim,

♥  $\Omega$  é sobrejetora.

Sejam  $\mathcal{L}_0, \dots, \mathcal{L}_{d-1} \in \mathcal{L}$  e  $\mathcal{M}_0, \dots, \mathcal{M}_{d-1} \in \mathcal{M}$

as retas obtidas no Fato 2 e Fato 3, respectivamente. Verifica-se que:

$$\mathcal{S}_\phi \cap Q_{\mathbf{T}} = \mathcal{L}_0 \cup \dots \cup \mathcal{L}_{d-1} \cup \mathcal{M}_0 \cup \dots \cup \mathcal{M}_{d-1} \quad \text{e} \quad \Omega(\mathcal{M}_i) = \mathbf{T}$$

sendo  $Q_{\mathbf{T}}$  é a quádrlica associada ao automorfismo  $\mathbf{T} \in \Gamma_C$  e  $\Omega: \mathcal{L}'_\phi \rightarrow \Gamma_C$  dada por  $\ell \mapsto \mathbf{T}_\ell$  com

$$\mathbf{T}_\ell([r:s]) = [\alpha r + \beta s : \gamma r + \delta s] \quad \text{se, } \ell = Z(\alpha z + \beta t - x, \gamma z + \delta t - y).$$

Assim,

♥  $\Omega$  é sobrejetora.

♥  $\Omega^{-1}(\mathbf{T}) = \{\mathcal{M}_0, \dots, \mathcal{M}_{d-1}\}.$

Visto que

$$n_\phi := \left| \left\{ \text{retas contidas em } \mathcal{S}_\phi \right\} \right| = |\mathcal{L}_\phi| + |\mathcal{L}'_\phi|$$

se  $\mathcal{S}_\phi = \mathcal{Z}(\phi(x, y) - \phi(z, t))$ .

Visto que

$$n_\phi := \left| \left\{ \text{retas contidas em } \mathcal{S}_\phi \right\} \right| = |\mathcal{L}_\phi| + |\mathcal{L}'_\phi|$$

se  $\mathcal{S}_\phi = \mathcal{Z}(\phi(x, y) - \phi(z, t))$ .

Concluimos que

$$n_\phi = d^2 + d \cdot |\Gamma_C|$$

sendo  $\Gamma_C = \left\{ \mathbf{T} \in \text{Aut}(\mathbb{P}^1) \mid \mathbf{T}(C) = C \right\}$  e  $C = \mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(\phi)$ .

Visto que

$$n_\phi := \left| \left\{ \text{retas contidas em } \mathcal{S}_\phi \right\} \right| = |\mathcal{L}_\phi| + |\mathcal{L}'_\phi|$$

se  $\mathcal{S}_\phi = \mathcal{Z}(\phi(x, y) - \phi(z, t))$ .

Concluimos que

$$n_\phi = d^2 + d \cdot |\Gamma_C|$$

sendo  $\Gamma_C = \left\{ \mathbf{T} \in \text{Aut}(\mathbb{P}^1) \mid \mathbf{T}(C) = C \right\}$  e  $C = \mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(\phi)$ .

---

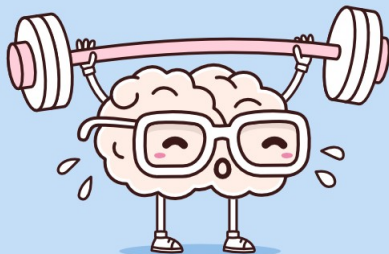
PRÓXIMA AULA

---

Vamos abordar o cálculo de  $|\Gamma_C|$ . Mais precisamente, como estimar o valor máximo possível.

# APÊNDICE:

Sobre a prova dos Fatos 2 e 3





## Fato 2.

Seja  $\mathcal{L}$  a família de retas de  $Q_T$  em (2) e  $M = \mathcal{Z}(x, y)$ . Verifica-se que:

## Fato 2.

Seja  $\mathcal{L}$  a família de retas de  $Q_7$  em (2) e  $M = \mathcal{Z}(x, y)$ . Verifica-se que:

- (i)  $\mathcal{L}_y \cap M \neq \emptyset$  para todo  $y \in \mathbb{P}^1$ .

## Fato 2.

Seja  $\mathcal{L}$  a família de retas de  $Q_7$  em (2) e  $M = \mathcal{Z}(x, y)$ . Verifica-se que:

- (i)  $\mathcal{L}_y \cap M \neq \emptyset$  para todo  $y \in \mathbb{P}^1$ .
- (ii)  $\mathcal{L}_y \subset \mathcal{S}_\phi = \mathcal{Z}(\phi(x, y) - \phi(z, t)) \iff y \in C = \mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(\phi) = \{[a_i : b_i]\}_{i=1}^d$ .

## Fato 2.

Seja  $\mathcal{L}$  a família de retas de  $Q_1$  em (2) e  $M = \mathcal{Z}(x, y)$ . Verifica-se que:

- (i)  $\mathcal{L}_y \cap M \neq \emptyset$  para todo  $y \in \mathbb{P}^1$ .
- (ii)  $\mathcal{L}_y \subset \mathcal{S}_\phi = \mathcal{Z}(\phi(x, y) - \phi(z, t)) \iff y \in C = \mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(\phi) = \{[a_i : b_i]\}_{i=1}^d$ .

**Sobre a prova do Fato 2.** A partir da definição da família  $\mathcal{L}$  tem-se que

$$\mathcal{L}_y = \mathcal{Z}((\gamma c + \delta d)x - (\alpha c + \beta d)y, dz - ct) \quad \text{se} \quad y = [c : d] \in \mathbb{P}^1.$$

## Fato 2.

Seja  $\mathcal{L}$  a família de retas de  $Q_7$  em (2) e  $M = \mathcal{Z}(x, y)$ . Verifica-se que:

- (i)  $\mathcal{L}_y \cap M \neq \emptyset$  para todo  $y \in \mathbb{P}^1$ .
- (ii)  $\mathcal{L}_y \subset \mathcal{S}_\phi = \mathcal{Z}(\phi(x, y) - \phi(z, t)) \iff y \in C = \mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(\phi) = \{[a_i : b_i]\}_{i=1}^d$ .

**Sobre a prova do Fato 2.** A partir da definição da família  $\mathcal{L}$  tem-se que

$$\mathcal{L}_y = \mathcal{Z}((\gamma c + \delta d)x - (\alpha c + \beta d)y, dz - ct) \quad \text{se} \quad y = [c : d] \in \mathbb{P}^1.$$

Além disso, note que

$$p = [\alpha c + \beta d : \gamma c + \delta d : 0 : 0] \quad \text{e} \quad q = [0 : 0 : c : d]$$

são pontos distintos da reta  $\mathcal{L}_y$  (logo determinam  $\mathcal{L}_y$ ).

## Fato 2.

Seja  $\mathcal{L}$  a família de retas de  $Q_7$  em (2) e  $M = \mathcal{Z}(x, y)$ . Verifica-se que:

- (i)  $\mathcal{L}_y \cap M \neq \emptyset$  para todo  $y \in \mathbb{P}^1$ .
- (ii)  $\mathcal{L}_y \subset \mathcal{S}_\phi = \mathcal{Z}(\phi(x, y) - \phi(z, t)) \iff y \in C = \mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(\phi) = \{[a_i : b_i]\}_{i=1}^d$ .

**Sobre a prova do Fato 2.** A partir da definição da família  $\mathcal{L}$  tem-se que

$$\mathcal{L}_y = \mathcal{Z}((\gamma c + \delta d)x - (\alpha c + \beta d)y, dz - ct) \quad \text{se} \quad y = [c : d] \in \mathbb{P}^1.$$

Além disso, note que

$$p = [\alpha c + \beta d : \gamma c + \delta d : 0 : 0] \quad \text{e} \quad q = [0 : 0 : c : d]$$

são pontos distintos da reta  $\mathcal{L}_y$  (logo determinam  $\mathcal{L}_y$ ).

- (i) Basta observar que  $q \in \mathcal{L}_y \cap M$ .

## Fato 2.

Seja  $\mathcal{L}$  a família de retas de  $Q_7$  em (2) e  $M = \mathcal{Z}(x, y)$ . Verifica-se que:

- (i)  $\mathcal{L}_y \cap M \neq \emptyset$  para todo  $y \in \mathbb{P}^1$ .
- (ii)  $\mathcal{L}_y \subset \mathcal{S}_\phi = \mathcal{Z}(\phi(x, y) - \phi(z, t)) \iff y \in C = \mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(\phi) = \{[a_i : b_i]\}_{i=1}^d$ .

**Sobre a prova do Fato 2.** A partir da definição da família  $\mathcal{L}$  tem-se que

$$\mathcal{L}_y = \mathcal{Z}((\gamma c + \delta d)x - (\alpha c + \beta d)y, dz - ct) \quad \text{se} \quad y = [c : d] \in \mathbb{P}^1.$$

Além disso, note que

$$p = [\alpha c + \beta d : \gamma c + \delta d : 0 : 0] \quad \text{e} \quad q = [0 : 0 : c : d]$$

são pontos distintos da reta  $\mathcal{L}_y$  (logo determinam  $\mathcal{L}_y$ ).

(i) Basta observar que  $q \in \mathcal{L}_y \cap M$ .

(ii) Se  $\mathcal{L}_y \subset \mathcal{S}_\phi$  então  $q \in \mathcal{S}_\phi$ .

## Fato 2.

Seja  $\mathcal{L}$  a família de retas de  $Q_1$  em (2) e  $M = \mathcal{Z}(x, y)$ . Verifica-se que:

- (i)  $\mathcal{L}_y \cap M \neq \emptyset$  para todo  $y \in \mathbb{P}^1$ .
- (ii)  $\mathcal{L}_y \subset \mathcal{S}_\phi = \mathcal{Z}(\phi(x, y) - \phi(z, t)) \iff y \in C = \mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(\phi) = \{[a_i : b_i]\}_{i=1}^d$ .

**Sobre a prova do Fato 2.** A partir da definição da família  $\mathcal{L}$  tem-se que

$$\mathcal{L}_y = \mathcal{Z}((\gamma c + \delta d)x - (\alpha c + \beta d)y, dz - ct) \quad \text{se} \quad y = [c : d] \in \mathbb{P}^1.$$

Além disso, note que

$$p = [\alpha c + \beta d : \gamma c + \delta d : 0 : 0] \quad \text{e} \quad q = [0 : 0 : c : d]$$

são pontos distintos da reta  $\mathcal{L}_y$  (logo determinam  $\mathcal{L}_y$ ).

- (i) Basta observar que  $q \in \mathcal{L}_y \cap M$ .
- (ii) Se  $\mathcal{L}_y \subset \mathcal{S}_\phi$  então  $q \in \mathcal{S}_\phi$ . Logo,



## Fato 2.

Seja  $\mathcal{L}$  a família de retas de  $Q_7$  em (2) e  $M = \mathcal{Z}(x, y)$ . Verifica-se que:

- (i)  $\mathcal{L}_y \cap M \neq \emptyset$  para todo  $y \in \mathbb{P}^1$ .
- (ii)  $\mathcal{L}_y \subset \mathcal{S}_\phi = \mathcal{Z}(\phi(x, y) - \phi(z, t)) \iff y \in C = \mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(\phi) = \{[a_i : b_i]\}_{i=1}^d$ .

**Sobre a prova do Fato 2.** A partir da definição da família  $\mathcal{L}$  tem-se que

$$\mathcal{L}_y = \mathcal{Z}((\gamma c + \delta d)x - (\alpha c + \beta d)y, dz - ct) \quad \text{se} \quad y = [c : d] \in \mathbb{P}^1.$$

Além disso, note que

$$p = [\alpha c + \beta d : \gamma c + \delta d : 0 : 0] \quad \text{e} \quad q = [0 : 0 : c : d]$$

são pontos distintos da reta  $\mathcal{L}_y$  (logo determinam  $\mathcal{L}_y$ ).

- (i) Basta observar que  $q \in \mathcal{L}_y \cap M$ .
- (ii) Se  $\mathcal{L}_y \subset \mathcal{S}_\phi$  então  $q \in \mathcal{S}_\phi$ . Logo,  $\phi(c, d) = 0$  o que nos garante que  $y \in C$ .

## Fato 2.

Seja  $\mathcal{L}$  a família de retas de  $Q_T$  em (2) e  $M = \mathcal{Z}(x, y)$ . Verifica-se que:

- (i)  $\mathcal{L}_y \cap M \neq \emptyset$  para todo  $y \in \mathbb{P}^1$ .
- (ii)  $\mathcal{L}_y \subset \mathcal{S}_\phi = \mathcal{Z}(\phi(x, y) - \phi(z, t)) \iff y \in C = \mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(\phi) = \{[a_i : b_i]\}_{i=1}^d$ .

**Sobre a prova do Fato 2.** A partir da definição da família  $\mathcal{L}$  tem-se que

$$\mathcal{L}_y = \mathcal{Z}((\gamma c + \delta d)x - (\alpha c + \beta d)y, dz - ct) \quad \text{se} \quad y = [c : d] \in \mathbb{P}^1.$$

Além disso, note que

$$p = [\alpha c + \beta d : \gamma c + \delta d : 0 : 0] \quad \text{e} \quad q = [0 : 0 : c : d]$$

são pontos distintos da reta  $\mathcal{L}_y$  (logo determinam  $\mathcal{L}_y$ ).

- (i) Basta observar que  $q \in \mathcal{L}_y \cap M$ .
- (ii) Se  $\mathcal{L}_y \subset \mathcal{S}_\phi$  então  $q \in \mathcal{S}_\phi$ . Logo,  $\phi(c, d) = 0$  o que nos garante que  $y \in C$ .

Para provar a outra implicação, lembre que a reta  $\mathcal{L}_y$  passa por  $p$  e  $q$ , e que

$$y \in C \xrightarrow{T \in \Gamma_C} T(y) = [\alpha c + \beta d : \gamma c + \delta d] \in C \quad (\text{Exercício}).$$

## De onde concluímos que

- Se  $y \in C = \mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(\phi)$  então  $\mathcal{L}_y \in \mathcal{L}_\phi = \{\ell \mid \ell \cap L \neq \emptyset\}$ .

## De onde concluímos que

- Se  $y \in C = \mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(\phi)$  então  $\mathcal{L}_y \in \mathcal{L}_\phi = \{\ell \mid \ell \cap L \neq \emptyset\}$ .
- Existem  $d$  retas (distintas) da família  $\mathcal{L}$  contidas em  $Q_T \cap \mathcal{S}_\phi$ .  
Tais retas serão denotadas por

$$\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_{d-1} \subset Q_T \cap \mathcal{S}_\phi$$

Lembre que  $S_\phi = \mathcal{Z}(\phi(x, y) - \phi(z, t))$  e  $\phi(u, v) = (a_1 v - b_1 u) \cdots (a_d v - b_d u)$ .

### Fato 3.

*Seja  $\mathcal{M}$  a família de retas de  $Q_T$  em (3). Existem exatamente  $d$  retas (distintas) da família  $\mathcal{M}$  contidas em  $Q_T \cap S_\phi$ . Tais retas pertencem a  $\mathcal{L}'_\phi$ .*

Lembre que  $\mathcal{S}_\phi = \mathcal{Z}(\phi(x, y) - \phi(z, t))$  e  $\phi(u, v) = (a_1 v - b_1 u) \cdots (a_d v - b_d u)$ .

### Fato 3.

*Seja  $\mathcal{M}$  a família de retas de  $Q_T$  em (3). Existem exatamente  $d$  retas (distintas) da família  $\mathcal{M}$  contidas em  $Q_T \cap \mathcal{S}_\phi$ . Tais retas pertencem a  $\mathcal{L}'_\phi$ .*

### Sobre a prova do Fato 3.

**1º Passo.** Mostrar que existe uma reta da família  $\mathcal{M}$  contida em  $\mathcal{S}_\phi$ .

Lembre que  $S_\phi = \mathcal{Z}(\phi(x, y) - \phi(z, t))$  e  $\phi(u, v) = (a_1 v - b_1 u) \cdots (a_d v - b_d u)$ .

### Fato 3.

*Seja  $\mathcal{M}$  a família de retas de  $Q_T$  em (3). Existem exatamente  $d$  retas (distintas) da família  $\mathcal{M}$  contidas em  $Q_T \cap S_\phi$ . Tais retas pertencem a  $\mathcal{L}'_\phi$ .*

### Sobre a prova do Fato 3.

**1º Passo.** Mostrar que existe uma reta da família  $\mathcal{M}$  contida em  $S_\phi$ .

♥ Escolha  $[c : d] \notin C = \mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(\phi)$ .

Lembre que  $S_\phi = \mathcal{Z}(\phi(x, y) - \phi(z, t))$  e  $\phi(u, v) = (a_1 v - b_1 u) \cdots (a_d v - b_d u)$ .

### Fato 3.

*Seja  $\mathcal{M}$  a família de retas de  $Q_T$  em (3). Existem exatamente  $d$  retas (distintas) da família  $\mathcal{M}$  contidas em  $Q_T \cap S_\phi$ . Tais retas pertencem a  $\mathcal{L}'_\phi$ .*

### Sobre a prova do Fato 3.

**1º Passo.** Mostrar que existe uma reta da família  $\mathcal{M}$  contida em  $S_\phi$ .

♥ Escolha  $[c : d] \notin C = \mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(\phi)$ . Logo  $[a : b] := \underbrace{\mathbf{T}([c : d])}_{[\alpha c + \beta d : \gamma c + \delta d]} \notin C$ . E desta última igualdade, segue que  $a(\gamma c + \delta d) - b(\alpha c + \beta d) = 0$ .



Lembre que  $S_\phi = \mathcal{Z}(\phi(x, y) - \phi(z, t))$  e  $\phi(u, v) = (a_1 v - b_1 u) \cdots (a_d v - b_d u)$ .

### Fato 3.

*Seja  $\mathcal{M}$  a família de retas de  $Q_T$  em (3). Existem exatamente  $d$  retas (distintas) da família  $\mathcal{M}$  contidas em  $Q_T \cap S_\phi$ . Tais retas pertencem a  $\mathcal{L}'_\phi$ .*

### Sobre a prova do Fato 3.

**1º Passo.** Mostrar que existe uma reta da família  $\mathcal{M}$  contida em  $S_\phi$ .

- ♥ Escolha  $[c : d] \notin C = \mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(\phi)$ . Logo  $[a : b] := \underbrace{\mathbf{T}([c : d])}_{[\alpha c + \beta d : \gamma c + \delta d]} \notin C$ . E desta última igualdade, segue que  $a(\gamma c + \delta d) - b(\alpha c + \beta d) = 0$ .
- ♥ Escolha  $\lambda \in \mathbb{C}$  tal que  $p = [\lambda a : \lambda b : c : d] \in S_\phi$

Lembre que  $S_\phi = \mathcal{Z}(\phi(x, y) - \phi(z, t))$  e  $\phi(u, v) = (a_1 v - b_1 u) \cdots (a_d v - b_d u)$ .

### Fato 3.

*Seja  $\mathcal{M}$  a família de retas de  $Q_T$  em (3). Existem exatamente  $d$  retas (distintas) da família  $\mathcal{M}$  contidas em  $Q_T \cap S_\phi$ . Tais retas pertencem a  $\mathcal{L}'_\phi$ .*

### Sobre a prova do Fato 3.

**1º Passo.** Mostrar que existe uma reta da família  $\mathcal{M}$  contida em  $S_\phi$ .

♥ Escolha  $[c : d] \notin C = \mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(\phi)$ . Logo  $[a : b] := \underbrace{\mathbf{T}([c : d])}_{[\alpha c + \beta d : \gamma c + \delta d]} \notin C$ . E desta

última igualdade, segue que  $a(\gamma c + \delta d) - b(\alpha c + \beta d) = 0$ .

♥ Escolha  $\lambda \in \mathbb{C}$  tal que  $p = [\lambda a : \lambda b : c : d] \in S_\phi$  (i.e.  $\lambda^d \phi(a, b) - \phi(c, d) = 0$ )

Lembre que  $S_\phi = \mathcal{Z}(\phi(x, y) - \phi(z, t))$  e  $\phi(u, v) = (a_1 v - b_1 u) \cdots (a_d v - b_d u)$ .

### Fato 3.

*Seja  $\mathcal{M}$  a família de retas de  $Q_T$  em (3). Existem exatamente  $d$  retas (distintas) da família  $\mathcal{M}$  contidas em  $Q_T \cap S_\phi$ . Tais retas pertencem a  $\mathcal{L}'_\phi$ .*

### Sobre a prova do Fato 3.

**1º Passo.** Mostrar que existe uma reta da família  $\mathcal{M}$  contida em  $S_\phi$ .

♥ Escolha  $[c : d] \notin C = \mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(\phi)$ . Logo  $[a : b] := \underbrace{\mathbf{T}([c : d])}_{[\alpha c + \beta d : \gamma c + \delta d]} \notin C$ . E desta

última igualdade, segue que  $a(\gamma c + \delta d) - b(\alpha c + \beta d) = 0$ .

♥ Escolha  $\lambda \in \mathbb{C}$  tal que  $p = [\lambda a : \lambda b : c : d] \in S_\phi$  (i.e.  $\lambda^d \phi(a, b) - \phi(c, d) = 0$ )

♥  $p = [\lambda a : \lambda b : c : d] \in Q_T = \mathcal{Z}(x(\gamma z + \delta t) - y(\alpha z + \beta t))$ .

Lembre que  $S_\phi = \mathcal{Z}(\phi(x, y) - \phi(z, t))$  e  $\phi(u, v) = (a_1 v - b_1 u) \cdots (a_d v - b_d u)$ .

### Fato 3.

*Seja  $\mathcal{M}$  a família de retas de  $Q_T$  em (3). Existem exatamente  $d$  retas (distintas) da família  $\mathcal{M}$  contidas em  $Q_T \cap S_\phi$ . Tais retas pertencem a  $\mathcal{L}'_\phi$ .*

### Sobre a prova do Fato 3.

**1º Passo.** Mostrar que existe uma reta da família  $\mathcal{M}$  contida em  $S_\phi$ .

♥ Escolha  $[c : d] \notin C = \mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(\phi)$ . Logo  $[a : b] := \underbrace{\mathbf{T}([c : d])}_{[\alpha c + \beta d : \gamma c + \delta d]} \notin C$ . E desta

última igualdade, segue que  $a(\gamma c + \delta d) - b(\alpha c + \beta d) = 0$ .

♥ Escolha  $\lambda \in \mathbb{C}$  tal que  $p = [\lambda a : \lambda b : c : d] \in S_\phi$  (i.e.  $\lambda^d \phi(a, b) - \phi(c, d) = 0$ )

♥  $p = [\lambda a : \lambda b : c : d] \in Q_T = \mathcal{Z}(x(\gamma z + \delta t) - y(\alpha z + \beta t))$ .

Lembremos que existe um única reta da família  $\mathcal{M}$  passando pelo ponto  $p$ .

Lembre que  $S_\phi = \mathcal{Z}(\phi(x, y) - \phi(z, t))$  e  $\phi(u, v) = (a_1 v - b_1 u) \cdots (a_d v - b_d u)$ .

### Fato 3.

*Seja  $\mathcal{M}$  a família de retas de  $Q_T$  em (3). Existem exatamente  $d$  retas (distintas) da família  $\mathcal{M}$  contidas em  $Q_T \cap S_\phi$ . Tais retas pertencem a  $\mathcal{L}'_\phi$ .*

### Sobre a prova do Fato 3.

**1º Passo.** Mostrar que existe uma reta da família  $\mathcal{M}$  contida em  $S_\phi$ .

♥ Escolha  $[c : d] \notin C = \mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(\phi)$ . Logo  $[a : b] := \underbrace{\mathbf{T}([c : d])}_{[\alpha c + \beta d : \gamma c + \delta d]} \notin C$ . E desta

última igualdade, segue que  $a(\gamma c + \delta d) - b(\alpha c + \beta d) = 0$ .

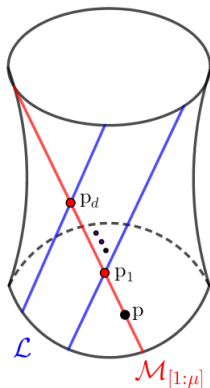
♥ Escolha  $\lambda \in \mathbb{C}$  tal que  $p = [\lambda a : \lambda b : c : d] \in S_\phi$  (i.e.  $\lambda^d \phi(a, b) - \phi(c, d) = 0$ )

♥  $p = [\lambda a : \lambda b : c : d] \in Q_T = \mathcal{Z}(x(\gamma z + \delta t) - y(\alpha z + \beta t))$ .

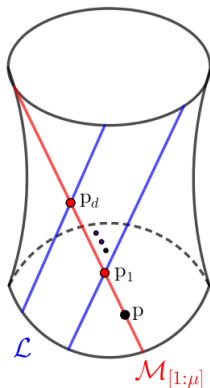
Lembremos que existe um única reta da família  $\mathcal{M}$  passando pelo ponto  $p$ . Como  $p \notin \mathcal{M}_{[0:1]} = \mathcal{Z}(z, t)$ , então tal reta é dada por  $\mathcal{M}_{[1:\mu]}$  para algum  $\mu \in \mathbb{C}$  não nulo (visto que, os pontos de  $\mathbb{P}^1$  são dados por  $[0 : 1]$  e  $[0 : s]$  com  $s \in \mathbb{C}$ ).

Além disso, sabemos que a reta  $\mathcal{M}_{[1:\mu]}$  encontra as retas  $\mathcal{L}_y$  para cada  $y \in C$  em exatamente um ponto,

Além disso, sabemos que a reta  $\mathcal{M}_{[1:\mu]}$  encontra as retas  $\mathcal{L}_y$  para cada  $y \in C$  em exatamente um ponto, digamos  $p_1, \dots, p_d$ , respectivamente.



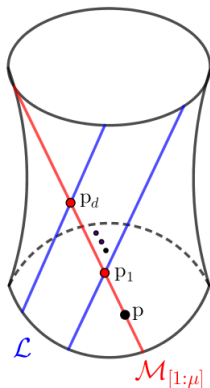
Além disso, sabemos que a reta  $\mathcal{M}_{[1:\mu]}$  encontra as retas  $\mathcal{L}_y$  para cada  $y \in C$  em exatamente um ponto, digamos  $p_1, \dots, p_d$ , respectivamente.



Lembre que a reta  $\mathcal{L}_y \subset \mathcal{S}_\phi$  para cada  $y \in C$ . Logo,  $p_1, \dots, p_d \in \mathcal{S}_\phi$ .



Além disso, sabemos que a reta  $\mathcal{M}_{[1:\mu]}$  encontra as retas  $\mathcal{L}_y$  para cada  $y \in C$  em exatamente um ponto, digamos  $p_1, \dots, p_d$ , respectivamente.

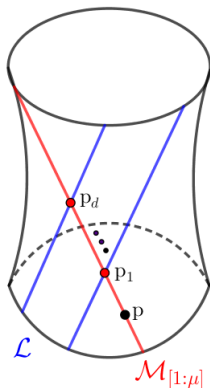


Lembre que a reta  $\mathcal{L}_y \subset \mathcal{S}_\phi$  para cada  $y \in C$ . Logo,  $p_1, \dots, p_d \in \mathcal{S}_\phi$ .

Assim,

$$\{p, p_1, \dots, p_d\} \in \mathcal{M}_{[1:\mu]} \cap \mathcal{S}_\phi.$$

Além disso, sabemos que a reta  $\mathcal{M}_{[1:\mu]}$  encontra as retas  $\mathcal{L}_y$  para cada  $y \in C$  em exatamente um ponto, digamos  $p_1, \dots, p_d$ , respectivamente.



Lembre que a reta  $\mathcal{L}_y \subset \mathcal{S}_\phi$  para cada  $y \in C$ . Logo,  $p_1, \dots, p_d \in \mathcal{S}_\phi$ .

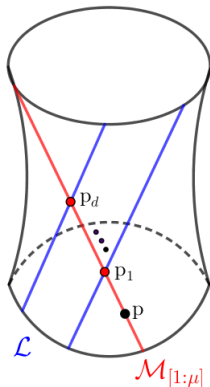
Assim,

$$\{p, p_1, \dots, p_d\} \in \mathcal{M}_{[1:\mu]} \cap \mathcal{S}_\phi.$$

O que implica em

$$\mathcal{M}_{[1:\mu]} \subset \mathcal{S}_\phi$$

Além disso, sabemos que a reta  $\mathcal{M}_{[1:\mu]}$  encontra as retas  $\mathcal{L}_y$  para cada  $y \in C$  em exatamente um ponto, digamos  $p_1, \dots, p_d$ , respectivamente.



Lembre que a reta  $\mathcal{L}_y \subset \mathcal{S}_\phi$  para cada  $y \in C$ . Logo,  $p_1, \dots, p_d \in \mathcal{S}_\phi$ .

Assim,

$$\{p, p_1, \dots, p_d\} \in \mathcal{M}_{[1:\mu]} \cap \mathcal{S}_\phi.$$

O que implica em

$$\mathcal{M}_{[1:\mu]} \subset \mathcal{S}_\phi$$

Se  $S \subset \mathbb{P}^3$  for uma superfície de grau  $d$  e  $\ell$  uma reta em  $\mathbb{P}^3$ , então  $|\ell \cap S| \leq d$  se,  $\ell \not\subset S$ .

**2º Passo.** Seja  $\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}_{[1:\mu]}$  a reta da família  $\mathcal{M}$  obtida no passo anterior. A partir da reta  $\mathcal{M}_0$  podem ser obtidas as retas  $\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_{d-1}$  da família  $\mathcal{M}$  tais que

$$\ell \in \mathcal{M} \quad e \quad \ell \subset \mathcal{S}_\phi \iff \ell \in \{\mathcal{M}_0, \dots, \mathcal{M}_{d-1}\}.$$

**2º Passo.** Seja  $\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}_{[1:\mu]}$  a reta da família  $\mathcal{M}$  obtida no passo anterior. A partir da reta  $\mathcal{M}_0$  podem ser obtidas as retas  $\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_{d-1}$  da família  $\mathcal{M}$  tais que

$$\ell \in \mathcal{M} \quad \text{e} \quad \ell \subset \mathcal{S}_\phi \iff \ell \in \{\mathcal{M}_0, \dots, \mathcal{M}_{d-1}\}.$$

Como são obtidas as retas  $\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_{d-1}$  a partir de  $\mathcal{M}_0$ ?

**2º Passo.** Seja  $\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}_{[1:\mu]}$  a reta da família  $\mathcal{M}$  obtida no passo anterior. A partir da reta  $\mathcal{M}_0$  podem ser obtidas as retas  $\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_{d-1}$  da família  $\mathcal{M}$  tais que

$$\ell \in \mathcal{M} \quad \text{e} \quad \ell \subset \mathcal{S}_\phi \iff \ell \in \{\mathcal{M}_0, \dots, \mathcal{M}_{d-1}\}.$$

Como são obtidas as retas  $\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_{d-1}$  a partir de  $\mathcal{M}_0$ ?

Considere o grupo  $\mathcal{U}_d = \{z \in \mathbb{C} \mid z^d = 1\}$  com o produto usual em  $\mathbb{C}$

**2º Passo.** Seja  $\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}_{[1:\mu]}$  a reta da família  $\mathcal{M}$  obtida no passo anterior. A partir da reta  $\mathcal{M}_0$  podem ser obtidas as retas  $\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_{d-1}$  da família  $\mathcal{M}$  tais que

$$\ell \in \mathcal{M} \quad \text{e} \quad \ell \subset \mathcal{S}_\phi \iff \ell \in \{\mathcal{M}_0, \dots, \mathcal{M}_{d-1}\}.$$

Como são obtidas as retas  $\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_{d-1}$  a partir de  $\mathcal{M}_0$ ?

Considere o grupo  $\mathcal{U}_d = \{z \in \mathbb{C} \mid z^d = 1\}$  com o produto usual em  $\mathbb{C}$

---

Os elementos de  $\mathcal{U}_d$  são denominados raízes  $d$ -ésimas da unidade. Por exemplo,  $\mathcal{U}_1 = \{1\}$ ,  $\mathcal{U}_2 = \{1, -1\}$ ,  $\mathcal{U}_3 = \{1, \xi, \xi^2\}$  com  $\xi = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ ,  $\mathcal{U}_4 = \{1, -1, i, -i\}$  com  $i^2 = -1, \dots$

---

**2º Passo.** Seja  $\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}_{[1:\mu]}$  a reta da família  $\mathcal{M}$  obtida no passo anterior. A partir da reta  $\mathcal{M}_0$  podem ser obtidas as retas  $\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_{d-1}$  da família  $\mathcal{M}$  tais que

$$\ell \in \mathcal{M} \quad \text{e} \quad \ell \subset \mathcal{S}_\phi \iff \ell \in \{\mathcal{M}_0, \dots, \mathcal{M}_{d-1}\}.$$

Como são obtidas as retas  $\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_{d-1}$  a partir de  $\mathcal{M}_0$ ?

Considere o grupo  $\mathcal{U}_d = \{z \in \mathbb{C} \mid z^d = 1\}$  com o produto usual em  $\mathbb{C}$

---

Os elementos de  $\mathcal{U}_d$  são denominados raízes  $d$ -ésimas da unidade. Por exemplo,  $\mathcal{U}_1 = \{1\}$ ,  $\mathcal{U}_2 = \{1, -1\}$ ,  $\mathcal{U}_3 = \{1, \xi, \xi^2\}$  com  $\xi = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ ,  $\mathcal{U}_4 = \{1, -1, i, -i\}$  com  $i^2 = -1, \dots$

---

Seja

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_d \times \mathcal{U}_d \quad (\xi, \eta) * (\xi_1, \eta_1) = (\xi \cdot \xi_1, \eta \cdot \eta_1)$$

o grupo denominado produto direto de  $\mathcal{U}_d$  com  $\mathcal{U}_d$ .



**2º Passo.** Seja  $\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}_{[1:\mu]}$  a reta da família  $\mathcal{M}$  obtida no passo anterior. A partir da reta  $\mathcal{M}_0$  podem ser obtidas as retas  $\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_{d-1}$  da família  $\mathcal{M}$  tais que

$$\ell \in \mathcal{M} \quad \text{e} \quad \ell \subset \mathcal{S}_\phi \iff \ell \in \{\mathcal{M}_0, \dots, \mathcal{M}_{d-1}\}.$$

Como são obtidas as retas  $\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_{d-1}$  a partir de  $\mathcal{M}_0$ ?

Considere o grupo  $\mathcal{U}_d = \{z \in \mathbb{C} \mid z^d = 1\}$  com o produto usual em  $\mathbb{C}$

---

Os elementos de  $\mathcal{U}_d$  são denominados raízes  $d$ -ésimas da unidade. Por exemplo,  $\mathcal{U}_1 = \{1\}$ ,  $\mathcal{U}_2 = \{1, -1\}$ ,  $\mathcal{U}_3 = \{1, \xi, \xi^2\}$  com  $\xi = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ ,  $\mathcal{U}_4 = \{1, -1, i, -i\}$  com  $i^2 = -1, \dots$

---

Seja

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_d \times \mathcal{U}_d \quad (\xi, \eta) * (\xi_1, \eta_1) = (\xi \cdot \xi_1, \eta \cdot \eta_1)$$

o grupo denominado produto direto de  $\mathcal{U}_d$  com  $\mathcal{U}_d$ .

Verifica-se que, para cada  $g = (\xi, \eta) \in \mathcal{U}$  a função  $A_g : \mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{P}^3$  dada por

$$p = [v_0 : v_1 : v_2 : v_3] \mapsto A_g(p) = [\xi v_0 : \xi v_1 : \eta v_2 : \eta v_3]$$

é uma bijeção.

A função  $A_g : \mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{P}^3$  preserva  $\mathcal{S}_\phi, Q_T$  e as retas de  $\mathcal{M}$

A função  $A_g : \mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{P}^3$  preserva  $\mathcal{S}_\phi, Q_T$  e as retas de  $\mathcal{M}$

De fato, verifica-se que

$$A_g(\mathcal{S}_\phi) = \mathcal{S}_\phi \quad e \quad A_g(Q_T) = Q_T$$

$$A_g(\mathcal{M}_{[a:b]}) = \mathcal{M}_{[\eta^{-1}a:\xi^{-1}b]} \quad se, \quad g = (\eta, \xi) \in \mathcal{U}.$$

A função  $A_g : \mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{P}^3$  preserva  $\mathcal{S}_\phi, Q_T$  e as retas de  $\mathcal{M}$

De fato, verifica-se que

$$A_g(\mathcal{S}_\phi) = \mathcal{S}_\phi \quad e \quad A_g(Q_T) = Q_T$$

$$A_g(\mathcal{M}_{[a:b]}) = \mathcal{M}_{[\eta^{-1}a:\xi^{-1}b]} \quad se, \quad g = (\eta, \xi) \in \mathcal{U}.$$

Assim,

A função  $A_g : \mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{P}^3$  preserva  $\mathcal{S}_\phi, Q_T$  e as retas de  $\mathcal{M}$

De fato, verifica-se que

$$A_g(\mathcal{S}_\phi) = \mathcal{S}_\phi \quad \text{e} \quad A_g(Q_T) = Q_T$$

$$A_g(\mathcal{M}_{[a:b]}) = \mathcal{M}_{[\eta^{-1}a:\xi^{-1}b]} \quad \text{se, } g = (\eta, \xi) \in \mathcal{U}.$$

Assim,

$$\heartsuit \quad A_g(Q_T \cap \mathcal{S}_\phi) = Q_T \cap \mathcal{S}_\phi, \text{ para todo } g \in \mathcal{U}.$$

A função  $A_g : \mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{P}^3$  preserva  $\mathcal{S}_\phi, Q_T$  e as retas de  $\mathcal{M}$

De fato, verifica-se que

$$A_g(\mathcal{S}_\phi) = \mathcal{S}_\phi \quad \text{e} \quad A_g(Q_T) = Q_T$$

$$A_g(\mathcal{M}_{[a:b]}) = \mathcal{M}_{[\eta^{-1}a:\xi^{-1}b]} \quad \text{se, } g = (\eta, \xi) \in \mathcal{U}.$$

Assim,

- ♥  $A_g(Q_T \cap \mathcal{S}_\phi) = Q_T \cap \mathcal{S}_\phi$ , para todo  $g \in \mathcal{U}$ .
- ♥ Se  $\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}_{[1:\mu]} \subset Q_T \cap \mathcal{S}_\phi$  e  $\mathcal{U}_d = \langle \xi \rangle = \{1, \xi, \dots, \xi^{d-1}\}$ , então

$$\mathcal{M}_i := A_{[1:\xi^{-i}]}(\mathcal{M}_0) = \mathcal{M}_{[1:\xi^i\mu]} \subset Q_T \cap \mathcal{S}_\phi \text{ para } i \in \{0, 1, \dots, d-1\}.$$

A função  $A_g : \mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{P}^3$  preserva  $\mathcal{S}_\phi, Q_T$  e as retas de  $\mathcal{M}$

De fato, verifica-se que

$$A_g(\mathcal{S}_\phi) = \mathcal{S}_\phi \quad \text{e} \quad A_g(Q_T) = Q_T$$

$$A_g(\mathcal{M}_{[a:b]}) = \mathcal{M}_{[\eta^{-1}a:\xi^{-1}b]} \quad \text{se, } g = (\eta, \xi) \in \mathcal{U}.$$

Assim,

- ♥  $A_g(Q_T \cap \mathcal{S}_\phi) = Q_T \cap \mathcal{S}_\phi$ , para todo  $g \in \mathcal{U}$ .
- ♥ Se  $\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}_{[1:\mu]} \subset Q_T \cap \mathcal{S}_\phi$  e  $\mathcal{U}_d = \langle \xi \rangle = \{1, \xi, \dots, \xi^{d-1}\}$ , então

$$\mathcal{M}_i := A_{[1:\xi^{-i}]}(\mathcal{M}_0) = \mathcal{M}_{[1:\xi^i\mu]} \subset Q_T \cap \mathcal{S}_\phi \quad \text{para } i \in \{0, 1, \dots, d-1\}.$$

- ♥ As retas  $\mathcal{M}_0, \dots, \mathcal{M}_{d-1}$  pertencem a  $\mathcal{L}'_\phi$  (visto que  $\mathbf{M} \in \mathcal{M}$ ).

A função  $A_g : \mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{P}^3$  preserva  $\mathcal{S}_\phi, Q_T$  e as retas de  $\mathcal{M}$

De fato, verifica-se que

$$A_g(\mathcal{S}_\phi) = \mathcal{S}_\phi \quad \text{e} \quad A_g(Q_T) = Q_T$$

$$A_g(\mathcal{M}_{[a:b]}) = \mathcal{M}_{[\eta^{-1}a:\xi^{-1}b]} \quad \text{se, } g = (\eta, \xi) \in \mathcal{U}.$$

Assim,

- ♥  $A_g(Q_T \cap \mathcal{S}_\phi) = Q_T \cap \mathcal{S}_\phi$ , para todo  $g \in \mathcal{U}$ .
- ♥ Se  $\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}_{[1:\mu]} \subset Q_T \cap \mathcal{S}_\phi$  e  $\mathcal{U}_d = \langle \xi \rangle = \{1, \xi, \dots, \xi^{d-1}\}$ , então

$$\mathcal{M}_i := A_{[1:\xi^{-i}]}(\mathcal{M}_0) = \mathcal{M}_{[1:\xi^i\mu]} \subset Q_T \cap \mathcal{S}_\phi \text{ para } i \in \{0, 1, \dots, d-1\}.$$

- ♥ As retas  $\mathcal{M}_0, \dots, \mathcal{M}_{d-1}$  pertencem a  $\mathcal{L}'_\phi$  (visto que  $\mathbf{M} \in \mathcal{M}$ ).

**Exercício:** Se  $\ell \in \mathcal{M}$  e  $\ell \subset \mathcal{S}_\phi$  então  $\ell = \mathcal{M}_i$  para algum  $i$ ,  $0 \leq i \leq d-1$ .