Os 5 sólidos platônicos e a busca pelo número de retas numa superfície projetiva

Sally Andria Vieira da Silva (UFF)
e
Jacqueline Fabiola Rojas Arancibia (UFPB)

ESCOLA DE VERÃO 2021

DM-UFPB

AULA 4, 08 de fevereiro de 2021

FOCO DA AULA 04

- Como contar as retas contidas na superfície $\mathcal{S}_\phi$?
- Iniciando a contagem.

$[1:1] \quad [2:3]$

$\mathbb{P}^1 \supset$ pontos zeros de Polinômios

$\phi \in \mathbb{C}[u,v]$

$[1:1] \longleftrightarrow Z(u-v)$

$[2:3] \longleftrightarrow Z(3u-2v)$

$[a:b] \longleftrightarrow Z(b\cdot u - a\cdot v)$

$\phi = u^2 - v^2$

$[r:s] \in Z(u^2-v^2) \iff r^2 - s^2 = 0$

$\iff r^2 = s^2$

$\iff r = s$ ou $r = -s$

$1^{\text{o}} \qquad 2^{\text{o}}$

$Z(u^2-v^2) = \{[s:s], [-s:s]\}$

$= \{[1:1], [-1:1]\}$

Lembretes e notações

$\mathbb{P}^3 \supset$ planos, retas, superfícies

$Z(f)$ $\quad Z(f) \cap Z(g) = Z(f,g)$ $\quad Z(g)$

$f, g \in \mathbb{C}[x, y, z, t]$

Ex) Plano $\quad Z(x-y),\ Z(y-2z+8t)$

$x=0,\ y=0$ Retas $\quad Z(x,y),\ Z(x,2x),\ Z(z,t)$

não é reta

Sup $\quad Z(xy-zt),\ Z(x^3+y^3-z^3-t^3)$

Observe que

a partir de d pontos distintos na reta projetiva, digamos, $\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_d$

$\mathrm{x}_1 = [a_1 : b_1]$ $\quad$ $\mathrm{x}_2 = [a_2 : b_2]$ $\quad \cdots \quad$ $\mathrm{x}_d = [a_d : b_d]$

$u \quad v$

obtemos o polinômio homogêneo de grau d

$$\phi(u, v) = (a_1 v - b_1 u) \cdot (a_2 v - b_2 u) \cdots (a_d v - b_d u) \in \mathbb{C}[u, v].$$

$\cancel{a_d b_d - b_d a_d} = 0$

Observe que

a partir de d pontos distintos na reta projetiva, digamos, $\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_d$

$$\mathrm{x}_1 = [a_1 : b_1] \qquad \mathrm{x}_2 = [a_2 : b_2] \qquad \cdots \qquad \mathrm{x}_d = [a_d : b_d]$$

obtemos o polinômio homogêneo de grau d

$$\phi(u, v) = (a_1 v - b_1 u) \cdot (a_2 v - b_2 u) \cdots (a_d v - b_d u) \in \mathbb{C}[u, v].$$

Ao qual associamos a superfície não singular

$$\boxed{\mathcal{S}_\phi = \mathcal{Z}(\phi(x, y) - \phi(z, t)) \subset \mathbb{P}^3.}$$

Considere a reta $\mathrm{L} = \mathcal{Z}(z, t)$ em $\mathbb{P}^3$.

Para cada reta ℓ contida na superfície $\mathcal{S}_\phi$, temos duas possibilidades:

Considere a reta $\mathrm{L} = \mathcal{Z}(z, t)$ em $\mathbb{P}^3$.

Para cada reta ℓ contida na superfície $\mathcal{S}_\phi$, temos duas possibilidades:

$$\ell \cap \mathrm{L} \neq \varnothing \quad \text{ou} \quad \ell \cap \mathrm{L} = \varnothing.$$

Considere a reta $\mathrm{L} = \mathcal{Z}(z, t)$ em $\mathbb{P}^3$.

Para cada reta ℓ contida na superfície $\mathcal{S}_\phi$, temos duas possibilidades:

$$\ell \cap \mathrm{L} \neq \varnothing \quad \text{ou} \quad \ell \cap \mathrm{L} = \varnothing.$$

Assim, os conjuntos:

$$\mathcal{L}_\phi = \left\{ \ell \subset \mathcal{S}_\phi \mid \ell \cap \mathrm{L} \neq \varnothing \right\} \quad \text{e} \quad \mathcal{L}'_\phi = \left\{ \ell \subset \mathcal{S}_\phi \mid \ell \cap \mathrm{L} = \varnothing \right\},$$

determinam uma partição do conjunto constituído por todas as retas na superfície $\mathcal{S}_\phi$, ou seja,

$$\left\{ \ell \mid \ell \text{ é uma reta contida na superfície } \mathcal{S}_\phi \right\} = \mathcal{L}_\phi \,\dot\cup\, \mathcal{L}'_\phi$$

Considere a reta $\mathrm{L} = \mathcal{Z}(z, t)$ em $\mathbb{P}^3$.

Para cada reta ℓ contida na superfície $\mathcal{S}_\phi$, temos duas possibilidades:

$$\ell \cap \mathrm{L} \neq \varnothing \quad \text{ou} \quad \ell \cap \mathrm{L} = \varnothing.$$

Assim, os conjuntos:

$$\mathcal{L}_\phi = \left\{\ell \subset \mathcal{S}_\phi \mid \ell \cap \mathrm{L} \neq \varnothing\right\} \quad \text{e} \quad \mathcal{L}'_\phi = \left\{\ell \subset \mathcal{S}_\phi \mid \ell \cap \mathrm{L} = \varnothing\right\},$$

determinam uma partição do conjunto constituído por todas as retas na superfície $\mathcal{S}_\phi$, ou seja,

$$\left\{\ell \mid \ell \text{ é uma reta contida na superfície } \mathcal{S}_\phi\right\} = \mathcal{L}_\phi \,\dot\cup\, \mathcal{L}'_\phi$$

Assim,

$$n_\phi = \left|\left\{ \text{ retas contidas em } \mathcal{S}_\phi\right\}\right| = |\mathcal{L}_\phi| + |\mathcal{L}'_\phi|.$$

A seguir, vamos calcular $|\mathcal{L}_\phi|$.

Comecemos com algumas observações:

A seguir, vamos calcular $|\mathcal{L}_\phi|$.

Comecemos com algumas observações:

- Lembre que $[a:b] \in \mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(\phi) \iff \phi(a,b) = 0$.

A seguir, vamos calcular $|\mathcal{L}_{\phi}|$.

Comecemos com algumas observações:

- Lembre que $[a:b] \in \mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(\phi) \iff \phi(a,b) = 0$. Logo, se

$$\phi(u,v) = (a_1 v - b_1 u)\cdot(a_2 v - b_2 u)\cdots(a_d v - b_d u) \in \mathbb{C}[u,v],$$

$= 0$ $= 0$ $u = v = 0$

então segue que $\mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(\phi) = \left\{\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_d\right\}$, com $\mathrm{x}_i = [a_i : b_i]$ e $\phi(0,0) = 0$.

A seguir, vamos calcular $|\mathcal{L}_\phi|$.

Comecemos com algumas observações:

- Lembre que $[a:b] \in \mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(\phi) \iff \phi(a,b) = 0$. Logo, se

$$\phi(u,v) = (a_1 v - b_1 u)\cdot(a_2 v - b_2 u)\cdots(a_d v - b_d u) \in \mathbb{C}[u,v],$$

  então segue que $\mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(\phi) = \{\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_d\}$, com $\mathrm{x}_i = [a_i : b_i]$ e $\phi(0,0) = 0$.

- Se $\mathrm{p} = [a:b:c:d] \in \mathbb{P}^3$ tem-se que

$$\underbrace{\mathrm{p} \in \mathcal{S}_\phi}_{} = \mathcal{Z}(\underbrace{\phi(x,y) - \phi(z,t)}_{}) \iff \phi(a,b) - \phi(c,d) = 0$$

A seguir, vamos calcular $|\mathcal{L}_\phi|$.

Comecemos com algumas observações:

- Lembre que $[a:b] \in \mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(\phi) \iff \phi(a,b) = 0$. Logo, se

$$\phi(u,v) = (a_1 v - b_1 u)\cdot(a_2 v - b_2 u)\cdots(a_d v - b_d u) \in \mathbb{C}[u,v],$$

  então segue que $\mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(\phi) = \{\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_d\}$, com $\mathrm{x}_i = [a_i : b_i]$ e $\phi(0,0) = 0$.

- Se $\mathrm{p} = [a:b:c:d] \in \mathbb{P}^3$ tem-se que

$$\mathrm{p} \in \mathcal{S}_\phi = \mathcal{Z}(\phi(x,y) - \phi(z,t)) \iff \phi(a,b) - \phi(c,d) = 0$$

- Considere as retas $\mathrm{L} = \mathcal{Z}(z,t)$ e $\mathrm{M} = \mathcal{Z}(x,y)$ em $\mathbb{P}^3$. Note que:

A seguir, vamos calcular $|\mathcal{L}_\phi|$.

Comecemos com algumas observações:

- Lembre que $[a : b] \in \mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(\phi) \iff \phi(a, b) = 0$. Logo, se

$$\phi(u, v) = (a_1 v - b_1 u) \cdot (a_2 v - b_2 u) \cdots (a_d v - b_d u) \in \mathbb{C}[u, v],$$

  então segue que $\mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(\phi) = \{\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_d\}$, com $\mathrm{x}_i = [a_i : b_i]$ e $\phi(0, 0) = 0$.

- Se $\mathrm{p} = [a : b : c : d] \in \mathbb{P}^3$ tem-se que

$$\mathrm{p} \in \mathcal{S}_\phi = \mathcal{Z}(\phi(x, y) - \phi(z, t)) \iff \phi(a, b) - \phi(c, d) = 0$$

- Considere as retas $\mathrm{L} = \mathcal{Z}(z, t)$ e $\mathrm{M} = \mathcal{Z}(x, y)$ em $\mathbb{P}^3$. Note que:

$$\mathrm{p} = [a : b : c : d] \in \mathrm{L} \cap \mathcal{S}_\phi \iff c = d = 0 \text{ e } \phi(a, b) = 0$$

A seguir, vamos calcular $|\mathcal{L}_\phi|$.

Comecemos com algumas observações:

- Lembre que $[a:b] \in \mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(\phi) \iff \phi(a,b) = 0$. Logo, se
$$\phi(u,v) = (a_1 v - b_1 u)\cdot(a_2 v - b_2 u)\cdots(a_d v - b_d u) \in \mathbb{C}[u,v],$$
então segue que $\mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(\phi) = \{\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_d\}$, com $\mathrm{x}_i = [a_i : b_i]$ e $\phi(0,0) = 0$.
- Se $\mathrm{p} = [a:b:c:d] \in \mathbb{P}^3$ tem-se que
$$\mathrm{p} \in \mathcal{S}_\phi = \mathcal{Z}(\phi(x,y) - \phi(z,t)) \iff \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{\phi(a,b)} - \phi(c,d) = 0$$
- Considere as retas $\mathrm{L} = \mathcal{Z}(z,t)$ e $\mathrm{M} = \mathcal{Z}(x,y)$ em $\mathbb{P}^3$. Note que:
$$\mathrm{p} = [a:b:c:d] \in \mathrm{L} \cap \mathcal{S}_\phi \iff c = d = 0 \text{ e } \phi(a,b) = 0$$
$$\mathrm{p} = [a:b:c:d] \in \mathrm{M} \cap \mathcal{S}_\phi \iff a = b = 0 \text{ e } \phi(c,d) = 0$$

A seguir, vamos calcular $|\mathcal{L}_\phi|$.

Comecemos com algumas observações:

- Lembre que $[a:b] \in \mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(\phi) \iff \phi(a,b) = 0$. Logo, se

$$\phi(u,v) = (a_1 v - b_1 u)\cdot(a_2 v - b_2 u)\cdots(a_d v - b_d u) \in \mathbb{C}[u,v],$$

então segue que $\mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(\phi) = \{\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_d\}$, com $\mathrm{x}_i = [a_i : b_i]$ e $\phi(0,0) = 0$.

- Se $\mathrm{p} = [a:b:c:d] \in \mathbb{P}^3$ tem-se que

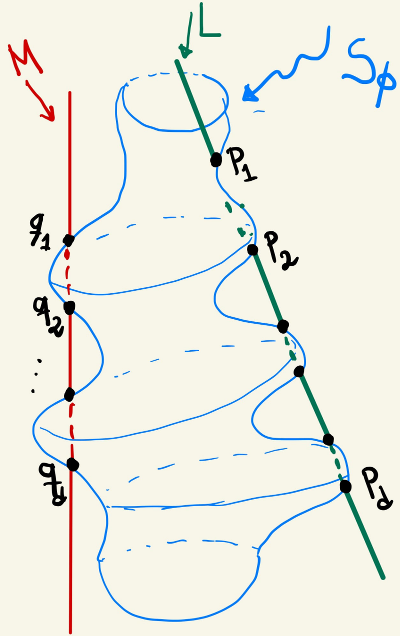
$$\mathrm{p} \in \mathcal{S}_\phi = \mathcal{Z}(\phi(x,y) - \phi(z,t)) \iff \phi(a,b) - \phi(c,d) = 0$$

- Considere as retas $\mathrm{L} = \mathcal{Z}(z,t)$ e $\mathrm{M} = \mathcal{Z}(x,y)$ em $\mathbb{P}^3$. Note que:

$$\mathrm{p} = [a:b:c:d] \in \mathrm{L} \cap \mathcal{S}_\phi \iff c = d = 0 \text{ e } \phi(a,b) = 0$$
$$\mathrm{p} = [a:b:c:d] \in \mathrm{M} \cap \mathcal{S}_\phi \iff a = b = 0 \text{ e } \phi(c,d) = 0$$

Portanto

$$\mathrm{L} \cap \mathcal{S}_\phi = \{\mathrm{p}_1 = [a_1 : b_1 : 0 : 0], \mathrm{p}_2 = [a_2 : b_2 : 0 : 0], \ldots, \mathrm{p}_d = [a_d : b_d : 0 : 0]\};$$
$$\mathrm{M} \cap \mathcal{S}_\phi = \{\mathrm{q}_1 = [0 : 0 : a_1 : b_1], \mathrm{q}_2 = [0 : 0 : a_2 : b_2], \ldots, \mathrm{q}_d = [0 : 0 : a_d : b_d]\}.$$



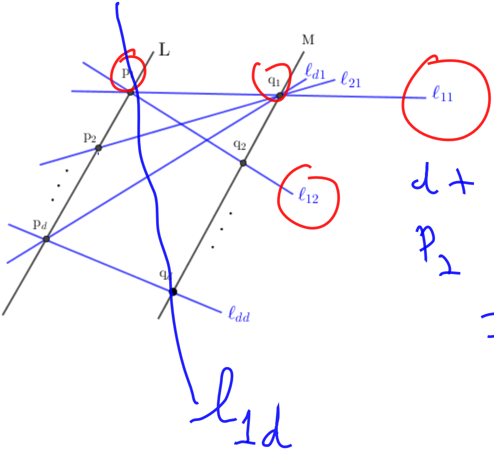
M
L
S_ϕ
p_1
p_2
p_d
q_1
q_2
q_d

Lembre-se que dois pontos distintos determinam uma única reta.

Lembre-se que dois pontos distintos determinam uma única reta.

Seja $\ell_{i,j}$ a reta que passa pelos pontos p_i e q_j com $i, j \in \{1, ..., d\}$

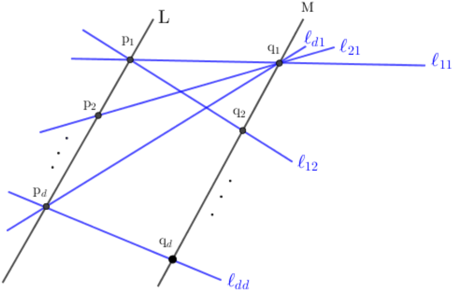
Seja $\ell_{i,j}$ a reta que passa pelos pontos p_i e q_j com $i, j \in \{1, ..., d\}$



$$\underset{p_1}{d} + \underset{p_2}{d} + \dots + \underset{p_d}{d}$$

$$= d^2$$

Seja $\ell_{i,j}$ a reta que passa pelos pontos p_i e q_j com $i, j \in \{1, ..., d\}$



Observe que

$$\left|\left\{\ell_{i,j} \mid 1 \leq i, j \leq d\right\}\right| = d^2.$$

Nosso objetivo, a seguir será mostrar que

$$\mathcal{L}_\phi := \left\{ \ell \subset \mathcal{S}_\phi \mid \ell \cap \mathrm{L} \neq \varnothing \right\} = \left\{ \ell_{i,j} \mid 1 \leq i, j \leq d \right\}.$$

Nosso objetivo, a seguir será mostrar que

$$\mathcal{L}_\phi := \left\{\ell \subset \mathcal{S}_\phi \mid \ell \cap \mathrm{L} \neq \varnothing\right\} = \left\{\ell_{i,j} \mid 1 \leq i, j \leq d\right\}.$$

Proposição 1: Com as notações supracitadas. Se $\ell_{i,j}$ é a reta que passa por p_i e q_j, então verifica-se que:

Nosso objetivo, a seguir será mostrar que

$$\mathcal{L}_\phi := \left\{ \ell \subset \mathcal{S}_\phi \mid \ell \cap \mathrm{L} \neq \emptyset \right\} = \left\{ \ell_{i,j} \mid 1 \leq i, j \leq d \right\}.$$

Proposição 1: Com as notações supracitadas. Se $\ell_{i,j}$ é a reta que passa por p_i e q_j, então verifica-se que:

(i) $\ell_{i,j} \subset \mathcal{S}_\phi$.

Nosso objetivo, a seguir será mostrar que

$$\mathcal{L}_\phi := \left\{ \ell \subset \mathcal{S}_\phi \mid \ell \cap \mathrm{L} \neq \varnothing \right\} = \left\{ \ell_{i,j} \mid 1 \leq i, j \leq d \right\}.$$

Proposição 1: Com as notações supracitadas. Se $\ell_{i,j}$ é a reta que passa por p_i e q_j, então verifica-se que:

(i) $\ell_{i,j} \subset \mathcal{S}_\phi$.

(ii) $\left\{ \ell_{i,j} \mid 1 \leq i, j \leq d \right\} \subseteq \mathcal{L}_\phi$. Logo, $|\mathcal{L}_\phi| \geq d^2$.

Nosso objetivo, a seguir será mostrar que

$$\mathcal{L}_\phi := \left\{\ell \subset \mathcal{S}_\phi \mid \ell \cap \mathrm{L} \neq \varnothing\right\} = \left\{\ell_{i,j} \mid 1 \leq i, j \leq d\right\}.$$

Proposição 1: Com as notações supracitadas. Se $\ell_{i,j}$ é a reta que passa por p_i e q_j, então verifica-se que:

(i) $\ell_{i,j} \subset \mathcal{S}_\phi$.

(ii) $\left\{\ell_{i,j} \mid 1 \leq i, j \leq d\right\} \subseteq \mathcal{L}_\phi$. Logo, $|\mathcal{L}_\phi| \geq d^2$.

Demostração:

Nosso objetivo, a seguir será mostrar que

$$\mathcal{L}_\phi := \left\{\ell \subset \mathcal{S}_\phi \mid \ell \cap \mathrm{L} \neq \varnothing\right\} = \left\{\ell_{i,j} \mid 1 \leq i, j \leq d\right\}.$$

Proposição 1: Com as notações supracitadas. Se $\ell_{i,j}$ é a reta que passa por p_i e q_j, então verifica-se que:

(i) $\ell_{i,j} \subset \mathcal{S}_\phi$.

(ii) $\left\{\ell_{i,j} \mid 1 \leq i, j \leq d\right\} \subseteq \mathcal{L}_\phi$. Logo, $|\mathcal{L}_\phi| \geq d^2$.

Demostração: Temos $\mathrm{p}_i = [a_i : b_i : 0 : 0]$ e $\mathrm{q}_j = [0 : 0 : a_j : b_j]$ pontos em $\mathbb{P}^3$.

Nosso objetivo, a seguir será mostrar que

$$\mathcal{L}_\phi := \left\{ \ell \subset \mathcal{S}_\phi \mid \ell \cap \mathrm{L} \neq \varnothing \right\} = \left\{ \ell_{i,j} \mid 1 \leq i, j \leq d \right\}.$$

Proposição 1: Com as notações supracitadas. Se $\ell_{i,j}$ é a reta que passa por p_i e q_j, então verifica-se que:

(i) $\ell_{i,j} \subset \mathcal{S}_\phi$.

(ii) $\left\{ \ell_{i,j} \mid 1 \leq i, j \leq d \right\} \subseteq \mathcal{L}_\phi$. Logo, $|\mathcal{L}_\phi| \geq d^2$.

Demostração: Temos $\mathrm{p}_i = [a_i : b_i : 0 : 0]$ e $\mathrm{q}_j = [0 : 0 : a_j : b_j]$ pontos em $\mathbb{P}^3$. Observe que

$$f = b_i x - a_i y \quad e \quad g = b_j z - a_j t$$

são polinômios homogêneos de grau 1, linearmente independentes em $\mathbb{C}[x, y, z, t]$.

$$\mathcal{L}_\phi := \left\{ \ell \subset \mathcal{S}_\phi \mid \ell \cap \mathrm{L} \neq \emptyset \right\} = \left\{ \ell_{i,j} \mid 1 \leq i, j \leq d \right\}.$$

Proposição 1: Com as notações supracitadas. Se $\ell_{i,j}$ é a reta que passa por p_i e q_j, então verifica-se que:

(i) $\ell_{i,j} \subset \mathcal{S}_\phi$.

(ii) $\left\{ \ell_{i,j} \mid 1 \leq i, j \leq d \right\} \subseteq \mathcal{L}_\phi$. Logo, $|\mathcal{L}_\phi| \geq d^2$.

Demostração: Temos $\mathrm{p}_i = [a_i : b_i : 0 : 0]$ e $\mathrm{q}_j = [0 : 0 : a_j : b_j]$ pontos em $\mathbb{P}^3$. Observe que

$$f = b_i x - a_i y \quad e \quad g = b_j z - a_j t$$

são polinômios homogêneos de grau 1, linearmente independentes em $\mathbb{C}[x, y, z, t]$. Logo, $\mathcal{Z}(f, g)$ define uma reta em $\mathbb{P}^3$.

Nosso objetivo, a seguir será mostrar que

$$\mathcal{L}_\phi := \left\{\ell \subset \mathcal{S}_\phi \mid \ell \cap \mathrm{L} \neq \varnothing\right\} = \left\{\ell_{i,j} \mid 1 \leq i, j \leq d\right\}.$$

Proposição 1: Com as notações supracitadas. Se $\ell_{i,j}$ é a reta que passa por p_i e q_j, então verifica-se que:

(i) $\ell_{i,j} \subset \mathcal{S}_\phi$.

(ii) $\left\{\ell_{i,j} \mid 1 \leq i, j \leq d\right\} \subseteq \mathcal{L}_\phi$. Logo, $|\mathcal{L}_\phi| \geq d^2$.

Demostração: Temos $\mathrm{p}_i = [a_i : b_i : 0 : 0]$ e $\mathrm{q}_j = [0 : 0 : a_j : b_j]$ pontos em $\mathbb{P}^3$. Observe que

$$f = b_i x - a_i y \quad e \quad g = b_j z - a_j t$$

são polinômios homogêneos de grau 1, linearmente independentes em $\mathbb{C}[x, y, z, t]$. Logo, $\mathcal{Z}(f, g)$ define uma reta em $\mathbb{P}^3$.

Além disso, os pontos

$$\mathrm{p}_i \text{ e } \mathrm{q}_j \text{ pertencem ao conjunto } \mathcal{Z}(f) \cap \mathcal{Z}(g) = \mathcal{Z}(f, g).$$

Portanto, $\ell_{i,j} = \mathcal{Z}(f,g) = \mathcal{Z}(b_i x - a_i y, b_j z - a_j t)$ e

$$\mathrm{p} = [a : b : c : d] \in \ell_{i,j} \iff \begin{cases} b_i a - a_i b = 0, \\ b_j c - a_j d = 0 \end{cases}$$

z t

Portanto, $\ell_{i,j} = \mathcal{Z}(f, g) = \mathcal{Z}(b_i x - a_i y, b_j z - a_j t)$ e

$$\mathrm{p} = [a : b : c : d] \in \ell_{i,j} \Longleftrightarrow \begin{cases} b_i a - a_i b = 0, \\ b_j c - a_j d = 0 \end{cases}$$

Lembrete e/ou Exercício

Sejam (u_1, u_2) e (v_1, v_2) vetores em $\mathbb{C}^2$ tais que (v_1, v_2) é não nulo. Verifica-se que:

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} = u_1 \cdot v_2 - u_2 \cdot v_1 = 0 \Longleftrightarrow \exists!\ \alpha \in \mathbb{C} \textit{ tal que } (u_1, u_2) = \alpha(v_1, v_2).$$

Portanto, $\ell_{i,j} = \mathcal{Z}(f, g) = \mathcal{Z}(b_i x - a_i y, b_j z - a_j t)$ e

$$\mathrm{p} = [a : b : c : d] \in \ell_{i,j} \iff \begin{cases} b_i a - a_i b = 0, \\ b_j c - a_j d = 0 \end{cases} \leftarrow \begin{vmatrix} a & b \\ a_i & b_i \end{vmatrix} = 0$$

Lembrete e/ou Exercício

Sejam (u_1, u_2) e (v_1, v_2) vetores em $\mathbb{C}^2$ tais que (v_1, v_2) é não nulo. Verifica-se que:

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} = u_1 \cdot v_2 - u_2 \cdot v_1 = 0 \iff \exists!\ \alpha \in \mathbb{C} \textit{ tal que } (u_1, u_2) = \alpha(v_1, v_2).$$

Assim, existem α, $\beta \in \mathbb{C}$ tais que $(a, b, c, d) = (\alpha \cdot a_i, \alpha \cdot b_i, \beta \cdot a_j, \beta \cdot b_j)$.

Portanto,

$$\mathrm{p} = [a : b : c : d] \in \ell_{i,j} \iff \mathrm{p} = [\alpha \cdot a_i : \alpha \cdot b_i : \beta \cdot a_j : \beta \cdot b_j] \textit{ com } [\alpha : \beta] \in \mathbb{P}^1.$$

Agora estamos preparados para mostrar o item (i) $\ell_{i,j} \subset \mathcal{S}_\phi$

Agora estamos preparados para mostrar o item (i) $\ell_{i,j} \subset \mathcal{S}_\phi$

$\boxed{\text{(i)}}$ Sabemos que $\mathcal{S}_\phi = \mathcal{Z}(F)$ com $F = \phi(x, y) - \phi(z, t)$. Assim,

$$\ell_{i,j} \subset \mathcal{S}_\phi \iff F(\mathrm{p}) = 0 \ \ \forall \ \mathrm{p} \in \ell_{i,j}.$$

p

Agora estamos preparados para mostrar o item (i) $\ell_{i,j} \subset \mathcal{S}_\phi$

$\boxed{\text{(i)}}$ Sabemos que $\mathcal{S}_\phi = \mathcal{Z}(F)$ com $F = \phi(x, y) - \phi(z, t)$. Assim,

$$\ell_{i,j} \subset \mathcal{S}_\phi \iff F(\mathrm{p}) = 0 \ \ \forall \ \mathrm{p} \in \ell_{i,j}.$$

Se $\mathrm{p} \in \ell_{i,j}$ então $\mathrm{p} \ = [\alpha a_i : \alpha b_i : \beta a_j : \beta b_j]$ com $[\alpha : \beta] \in \mathbb{P}^1$. Logo,

$$F(\mathrm{p}) = \phi(\alpha a_i, \alpha b_i) - \phi(\beta a_j, \beta b_j).$$

$\boxed{\text{(i)}}$ Sabemos que $\mathcal{S}_\phi = \mathcal{Z}(F)$ com $F = \phi(x,y) - \phi(z,t)$. Assim,

$$\ell_{i,j} \subset \mathcal{S}_\phi \iff F(\mathrm{p}) = 0 \;\; \forall\; \mathrm{p} \in \ell_{i,j}.$$

Se $\mathrm{p} \in \ell_{i,j}$ então $\mathrm{p} = [\alpha a_i : \alpha b_i : \beta a_j : \beta b_j]$ com $[\alpha : \beta] \in \mathbb{P}^1$. Logo,

$$F(\mathrm{p}) = \phi(\underbrace{\alpha a_i}_{u}, \underbrace{\alpha b_i}_{v}) - \phi(\beta a_j, \beta b_j).$$

Lembremos que,

$$\phi(u,v) = (a_1 v - b_1 u)\cdots(a_i v - b_i u)\cdots(a_j v - b_j u)\cdots(a_d v - b_d u).$$

Logo,

$$\phi(\alpha a_i, \alpha b_i) = (a_1 \cdot \alpha b_i - b_1 \cdot \alpha a_i)\cdots(a_i \cdot \alpha b_i - b_i \cdot \alpha a_i)\cdots(a_d \cdot \alpha b_i - b_d \cdot \alpha a_i) = \underline{\underline{0}}.$$

E analogamente, concluí-se que $\phi(\beta a_j, \beta b_j) = 0$.

Agora estamos preparados para mostrar o item (i) $\ell_{i,j} \subset \mathcal{S}_\phi$

$\boxed{\text{(i)}}$ Sabemos que $\mathcal{S}_\phi = \mathcal{Z}(F)$ com $F = \phi(x,y) - \phi(z,t)$. Assim,

$$\ell_{i,j} \subset \mathcal{S}_\phi \Longleftrightarrow F(\mathrm{p}) = 0 \;\; \forall \; \mathrm{p} \in \ell_{i,j}.$$

Se $\mathrm{p} \in \ell_{i,j}$ então $\mathrm{p} = [\alpha a_i : \alpha b_i : \beta a_j : \beta b_j]$ com $[\alpha : \beta] \in \mathbb{P}^1$. Logo,

$$F(\mathrm{p}) = \phi(\alpha a_i, \alpha b_i) - \phi(\beta a_j, \beta b_j).$$

Lembremos que,

$$\phi(u,v) = (a_1 v - b_1 u) \cdots (a_i v - b_i u) \cdots (a_j v - b_j u) \cdots (a_d v - b_d u).$$

Logo,

$$\phi(\alpha a_i, \alpha b_i) = (a_1 \cdot \alpha b_i - b_1 \cdot \alpha a_i) \cdots (a_i \cdot \alpha b_i - b_i \cdot \alpha a_i) \cdots (a_d \cdot \alpha b_i - b_d \cdot \alpha a_i) = 0.$$

E analogamente, concluí-se que $\phi(\beta a_j, \beta b_j) = 0$. Assim,

$$F(\mathrm{p}) = \phi(\alpha a_i, \alpha b_i) - \phi(\beta a_j, \beta b_j) = 0 \quad \forall \; [\alpha : \beta] \in \mathbb{P}^1 \Longrightarrow F(\mathrm{p}) = 0 \;\; \forall \; \mathrm{p} \in \ell_{i,j}.$$

Agora estamos preparados para mostrar o item (i) $\ell_{i,j} \subset \mathcal{S}_\phi$

$\boxed{\text{(i)}}$ Sabemos que $\mathcal{S}_\phi = \mathcal{Z}(F)$ com $F = \phi(x,y) - \phi(z,t)$. Assim,

$$\ell_{i,j} \subset \mathcal{S}_\phi \iff F(\mathrm{p}) = 0 \;\; \forall\; \mathrm{p} \in \ell_{i,j}.$$

Se $\mathrm{p} \in \ell_{i,j}$ então $\mathrm{p} = [\alpha a_i : \alpha b_i : \beta a_j : \beta b_j]$ com $[\alpha : \beta] \in \mathbb{P}^1$. Logo,

$$F(\mathrm{p}) = \phi(\alpha a_i, \alpha b_i) - \phi(\beta a_j, \beta b_j).$$

Lembremos que,

$$\phi(u,v) = (a_1 v - b_1 u) \cdots (a_i v - b_i u) \cdots (a_j v - b_j u) \cdots (a_d v - b_d u).$$

Logo,

$$\phi(\alpha a_i, \alpha b_i) = (a_1 \cdot \alpha b_i - b_1 \cdot \alpha a_i) \cdots (a_i \cdot \alpha b_i - b_i \cdot \alpha a_i) \cdots (a_d \cdot \alpha b_i - b_d \cdot \alpha a_i) = 0.$$

E analogamente, concluí-se que $\phi(\beta a_j, \beta b_j) = 0$. Assim,

$$F(\mathrm{p}) = \phi(\alpha a_i, \alpha b_i) - \phi(\beta a_j, \beta b_j) = 0 \quad \forall\; [\alpha : \beta] \in \mathbb{P}^1 \Longrightarrow F(\mathrm{p}) = 0 \;\; \forall\; \mathrm{p} \in \ell_{i,j}.$$

Portanto, $\ell_{i,j} \subset \mathcal{S}_\phi$.

$\boxed{\text{(ii)}}$ Agora, vamos mostrar que $\left\{\ell_{i,j} \mid 1 \leq i, j \leq d\right\} \subseteq \mathcal{L}_\phi := \left\{\ell \subset \mathcal{S}_\phi \mid \ell \cap \mathrm{L} \neq \varnothing\right\}$.

$\boxed{\text{(ii)}}$ Agora, vamos mostrar que $\left\{\ell_{i,j} \mid 1 \leq i, j \leq d\right\} \subseteq \mathcal{L}_\phi := \left\{\ell \subset \mathcal{S}_\phi \mid \ell \cap \mathrm{L} \neq \varnothing\right\}$.

Considere a reta $\ell_{i,j}$ e observe que,

$$\mathrm{p}_i = [a_i : b_i : 0 : 0] \in \mathrm{L} = \mathcal{Z}(z,t) \quad \text{e} \quad \mathrm{p}_i \in \ell_{i,j} \quad \text{para quaisquer } j.$$

$\boxed{\text{(ii)}}$ Agora, vamos mostrar que $\left\{\ell_{i,j} \mid 1 \leq i,j \leq d\right\} \subseteq \mathcal{L}_\phi := \left\{\ell \subset \mathcal{S}_\phi \mid \ell \cap \mathrm{L} \neq \varnothing\right\}$.

Considere a reta $\ell_{i,j}$ e observe que,

$$\mathrm{p}_i = [a_i : b_i : 0 : 0] \in \mathrm{L} = \mathcal{Z}(z,t) \quad \text{e} \quad \mathrm{p}_i \in \ell_{i,j} \quad \text{para quaisquer } j.$$

Portanto,

$$\ell_{ij} \cap \mathrm{L} \neq \varnothing.$$

$\boxed{\text{(ii)}}$ Agora, vamos mostrar que $\left\{\ell_{i,j} \mid 1 \leq i,j \leq d\right\} \subseteq \mathcal{L}_\phi := \left\{\ell \subset \mathcal{S}_\phi \mid \ell \cap \mathrm{L} \neq \varnothing\right\}$.

Considere a reta $\ell_{i,j}$ e observe que,

$$\mathrm{p}_i = [a_i : b_i : 0 : 0] \in \mathrm{L} = \mathcal{Z}(z,t) \quad \text{e} \quad \mathrm{p}_i \in \ell_{i,j} \quad \text{para quaisquer } j.$$

Portanto,

$$\ell_{ij} \cap \mathrm{L} \neq \varnothing.$$

Já mostramos que $\ell_{i,j} \subset \mathcal{S}_\phi$. Assim,

$$\ell_{i,j} \in \mathcal{L}_\phi = \left\{\ell \subset \mathcal{S}_\phi \mid \ell \cap \mathrm{L} \neq \varnothing\right\}$$

$\boxed{\text{(ii)}}$ Agora, vamos mostrar que $\left\{\ell_{i,j} \mid 1 \leq i,j \leq d\right\} \subseteq \mathcal{L}_\phi := \left\{\ell \subset \mathcal{S}_\phi \mid \ell \cap \mathrm{L} \neq \varnothing\right\}$.

Considere a reta $\ell_{i,j}$ e observe que,

$$\mathrm{p}_i = [a_i : b_i : 0 : 0] \in \mathrm{L} = \mathcal{Z}(z,t) \quad \text{e} \quad \mathrm{p}_i \in \ell_{i,j} \quad \text{para quaisquer } j.$$

Portanto,

$$\ell_{ij} \cap \mathrm{L} \neq \varnothing.$$

Já mostramos que $\ell_{i,j} \subset \mathcal{S}_\phi$. Assim,

$$\ell_{i,j} \in \mathcal{L}_\phi = \left\{\ell \subset \mathcal{S}_\phi \mid \ell \cap \mathrm{L} \neq \varnothing\right\}$$

Portanto, $\left\{\ell_{i,j} \mid 1 \leq i,j \leq d\right\} \subseteq \mathcal{L}_\phi$, o que implica em $|\mathcal{L}_\phi| \geq d^2$.

■

A seguir, mostraremos que $|\mathcal{L}_\phi| = d^2$.

O que nos permitirá concluir que:

$$\mathcal{L}_\phi := \left\{ \ell \subset \mathcal{S}_\phi \mid \ell \cap \mathrm{L} \neq \varnothing \right\} = \left\{ \ell_{i,j} \mid 1 \leq i, j \leq d \right\}.$$

A seguir, mostraremos que $|\mathcal{L}_\phi| = d^2$.

O que nos permitirá concluir que:

$$\mathcal{L}_\phi := \left\{ \ell \subset \mathcal{S}_\phi \mid \ell \cap \mathrm{L} \neq \varnothing \right\} = \left\{ \ell_{i,j} \mid 1 \leq i, j \leq d \right\}.$$

Considere uma reta ℓ contida na superfície $\mathcal{S}_\phi$. Note que:

A seguir, mostraremos que $|\mathcal{L}_\phi| = d^2$.

O que nos permitirá concluir que:

$$\mathcal{L}_\phi := \left\{ \ell \subset \mathcal{S}_\phi \mid \ell \cap \mathrm{L} \neq \varnothing \right\} = \left\{ \ell_{i,j} \mid 1 \leq i, j \leq d \right\}.$$

Considere uma reta ℓ contida na superfície $\mathcal{S}_\phi$. Note que:

- $\ell \neq \mathrm{L} = \mathcal{Z}(z, t)$

A seguir, mostraremos que $|\mathcal{L}_\phi| = d^2$.

O que nos permitirá concluir que:

$$\mathcal{L}_\phi := \left\{\ell \subset \mathcal{S}_\phi \mid \ell \cap \mathrm{L} \neq \varnothing\right\} = \left\{\ell_{i,j} \mid 1 \leq i,j \leq d\right\}.$$

Considere uma reta ℓ contida na superfície $\mathcal{S}_\phi$. Note que:

- $\ell \neq \mathrm{L} = \mathcal{Z}(z,t)$
- Se $\ell \cap \mathrm{L} \neq \varnothing$ então $\ell \cap \mathrm{L}$ consiste de um único ponto.

A seguir, mostraremos que $|\mathcal{L}_\phi| = d^2$.

O que nos permitirá concluir que:

$$\mathcal{L}_\phi := \left\{\ell \subset \mathcal{S}_\phi \mid \ell \cap \mathrm{L} \neq \varnothing\right\} = \left\{\ell_{i,j} \mid 1 \leq i, j \leq d\right\}.$$

Considere uma reta ℓ contida na superfície $\mathcal{S}_\phi$. Note que:

- $\ell \neq \mathrm{L} = \mathcal{Z}(z, t)$
- Se $\ell \cap \mathrm{L} \neq \varnothing$ então $\ell \cap \mathrm{L}$ consiste de um único ponto.
- Se $\mathrm{p} \in \ell \cap \mathrm{L}$ então $\mathrm{p} = [a : b : 0 : 0]$ e $\mathrm{p} \in \mathcal{S}_\phi = \mathcal{Z}(\phi(x, y) - \phi(z, t))$.

$\ell \in \mathcal{L}_\phi$

$z = t = 0$

A seguir, mostraremos que $|\mathcal{L}_\phi| = d^2$.

O que nos permitirá concluir que:

$$\mathcal{L}_\phi := \left\{\ell \subset \mathcal{S}_\phi \mid \ell \cap \mathrm{L} \neq \varnothing\right\} = \left\{\ell_{i,j} \mid 1 \leq i, j \leq d\right\}.$$

Considere uma reta ℓ contida na superfície $\mathcal{S}_\phi$. Note que:

- $\ell \neq \mathrm{L} = \mathcal{Z}(z, t)$
- Se $\ell \cap \mathrm{L} \neq \varnothing$ então $\ell \cap \mathrm{L}$ consiste de um único ponto.
- Se $\mathrm{p} \in \ell \cap \mathrm{L}$ então $\mathrm{p} = [a : b : 0 : 0]$ e $\mathrm{p} \in \mathcal{S}_\phi = \mathcal{Z}(\phi(x, y) - \phi(z, t))$. Logo,

$$\phi(a, b) = 0 \Longrightarrow [a : b] \in \mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(\phi) = \left\{[a_i : b_i]\right\}_{i=1}^{d} \Longrightarrow \mathrm{p} = \mathrm{p}_i \ \textit{para algum } i.$$

A seguir, mostraremos que $|\mathcal{L}_\phi| = d^2$.

O que nos permitirá concluir que:

$$\mathcal{L}_\phi := \left\{\ell \subset \mathcal{S}_\phi \mid \ell \cap \mathrm{L} \neq \varnothing\right\} = \left\{\ell_{i,j} \mid 1 \leq i, j \leq d\right\}.$$

Considere uma reta ℓ contida na superfície $\mathcal{S}_\phi$. Note que:

- $\ell \neq \mathrm{L} = \mathcal{Z}(z, t)$
- Se $\ell \cap \mathrm{L} \neq \varnothing$ então $\ell \cap \mathrm{L}$ consiste de um único ponto.
- Se $\mathrm{p} \in \ell \cap \mathrm{L}$ então $\mathrm{p} = [a : b : 0 : 0]$ e $\mathrm{p} \in \mathcal{S}_\phi = \mathcal{Z}(\phi(x, y) - \phi(z, t))$. Logo,

$$\phi(a, b) = 0 \Longrightarrow [a : b] \in \mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(\phi) = \left\{[a_i : b_i]\right\}_{i=1}^{d} \Longrightarrow \mathrm{p} = \mathrm{p}_i \ \textit{para algum } i.$$

- De forma análoga, se $\mathrm{M} = \mathcal{Z}(x, y)$ e $\ell \cap \mathrm{M} \neq \varnothing$ então $\ell \cap \mathrm{M}$ consiste de um único ponto.

A seguir, mostraremos que $|\mathcal{L}_\phi| = d^2$.

Resumo

$\ell \subset \mathcal{S}_\phi$

$\ell \in \mathcal{L}_\phi \to \ell \cap L \neq \phi$

O que nos permitirá concluir que:

$$\mathcal{L}_\phi := \left\{ \ell \subset \mathcal{S}_\phi \mid \ell \cap \mathrm{L} \neq \varnothing \right\} = \left\{ \ell_{i,j} \mid 1 \leq i, j \leq d \right\}.$$

$\Rightarrow \ell \cap L = \{p_i\}$

Considere uma reta ℓ contida na superfície $\mathcal{S}_\phi$. Note que:

$\ell \cap M \neq \phi$

$\Rightarrow \ell \cap M = \{q_j\}$

- $\ell \neq \mathrm{L} = \mathcal{Z}(z, t)$
- Se $\ell \cap \mathrm{L} \neq \varnothing$ então $\ell \cap \mathrm{L}$ consiste de um único ponto.
- Se $\mathrm{p} \in \ell \cap \mathrm{L}$ então $\mathrm{p} = [a : b : 0 : 0]$ e $\mathrm{p} \in \mathcal{S}_\phi = \mathcal{Z}(\phi(x, y) - \phi(z, t))$. Logo,

$$\phi(a, b) = 0 \Longrightarrow [a : b] \in \mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(\phi) = \left\{ [a_i : b_i] \right\}_{i=1}^{d} \Longrightarrow \mathrm{p} = \mathrm{p}_i \ \ \textit{para algum } i.$$

- De forma análoga, se $\mathrm{M} = \mathcal{Z}(x, y)$ e $\ell \cap \mathrm{M} \neq \varnothing$ então $\ell \cap \mathrm{M}$ consiste de um único ponto. De fato,

$$\ell \cap \mathrm{M} = \{\mathrm{q}_j\} \qquad \textit{para algum } j \in \{1, \ldots, d\}$$

com $\mathrm{q}_j = [0 : 0 : a_j : b_j]$ e $[a_j : b_j] \in \mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(\phi)$.

Assim, para concluir que

Assim, para concluir que

$$\mathcal{L}_\phi := \left\{\ell \subset \mathcal{S}_\phi \mid \ell \cap \mathrm{L} \neq \varnothing\right\} = \left\{\ell_{i,j} \mid 1 \leq i, j \leq d\right\}.$$

Basta mostrarmos que

$$\ell \cap \mathrm{L} \neq \varnothing \Longrightarrow \ell \cap \mathrm{M} \neq \varnothing.$$

Assim, para concluir que

$$\mathcal{L}_\phi := \left\{ \ell \subset \mathcal{S}_\phi \mid \ell \cap \mathrm{L} \neq \varnothing \right\} = \left\{ \ell_{i,j} \mid 1 \leq i, j \leq d \right\}.$$

Basta mostrarmos que

$$\ell \cap \mathrm{L} \neq \varnothing \Longrightarrow \ell \cap \mathrm{M} \neq \varnothing.$$

Proposição 2: Considere as retas $\mathrm{L} = \mathcal{Z}(z, t)$ e $\mathrm{M} = \mathcal{Z}(x, y)$ em $\mathbb{P}^3$. Se ℓ é uma reta contida na superfície $\mathcal{S}_\phi$ e $d \geq 2$. Então

$$\ell \cap \mathrm{L} \neq \varnothing \quad \Longleftrightarrow \quad \ell \cap \mathrm{M} \neq \varnothing.$$

Assim, para concluir que

$$\mathcal{L}_\phi := \left\{ \ell \subset \mathcal{S}_\phi \mid \ell \cap \mathrm{L} \neq \emptyset \right\} = \left\{ \ell_{i,j} \mid 1 \leq i, j \leq d \right\}.$$

Basta mostrarmos que

$$\ell \cap \mathrm{L} \neq \emptyset \Longrightarrow \ell \cap \mathrm{M} \neq \emptyset.$$

Proposição 2: Considere as retas $\mathrm{L} = \mathcal{Z}(z, t)$ e $\mathrm{M} = \mathcal{Z}(x, y)$ em $\mathbb{P}^3$. Se ℓ é uma reta contida na superfície $\mathcal{S}_\phi$ e $d \geq 2$. Então

$$\ell \cap \mathrm{L} \neq \emptyset \quad \Longleftrightarrow \quad \ell \cap \mathrm{M} \neq \emptyset.$$

Demostração:

Assim, para concluir que

$$\mathcal{L}_\phi := \left\{\ell \subset \mathcal{S}_\phi \mid \ell \cap \mathrm{L} \neq \varnothing\right\} = \left\{\ell_{i,j} \mid 1 \leq i,j \leq d\right\}.$$

Basta mostrarmos que

$$\ell \cap \mathrm{L} \neq \varnothing \Longrightarrow \ell \cap \mathrm{M} \neq \varnothing.$$

Proposição 2: Considere as retas $\mathrm{L} = \mathcal{Z}(z,t)$ e $\mathrm{M} = \mathcal{Z}(x,y)$ em $\mathbb{P}^3$. Se ℓ é uma reta contida na superfície $\mathcal{S}_\phi$ e $d \geq 2$. Então

$$\ell \cap \mathrm{L} \neq \varnothing \quad \Longleftrightarrow \quad \ell \cap \mathrm{M} \neq \varnothing.$$

Demostração: Assuma que $\ell \cap \mathrm{L} \neq \varnothing$. Assim, nosso objetivo é mostrar que $\ell \cap \mathrm{M} \neq \varnothing$.

Assim, para concluir que

$$\mathcal{L}_\phi := \left\{ \ell \subset \mathcal{S}_\phi \mid \ell \cap \mathrm{L} \neq \varnothing \right\} = \left\{ \ell_{i,j} \mid 1 \leq i, j \leq d \right\}.$$

Basta mostrarmos que

$$\ell \cap \mathrm{L} \neq \varnothing \Longrightarrow \ell \cap \mathrm{M} \neq \varnothing.$$

Proposição 2: Considere as retas $\mathrm{L} = \mathcal{Z}(z,t)$ e $\mathrm{M} = \mathcal{Z}(x,y)$ em $\mathbb{P}^3$. Se ℓ é uma reta contida na superfície $\mathcal{S}_\phi$ e $d \geq 2$. Então

$$\ell \cap \mathrm{L} \neq \varnothing \quad \Longleftrightarrow \quad \ell \cap \mathrm{M} \neq \varnothing.$$

Demostração: Assuma que $\ell \cap \mathrm{L} \neq \varnothing$. Assim, nosso objetivo é mostrar que $\ell \cap \mathrm{M} \neq \varnothing$.
Como $\ell \cap \mathrm{L} \neq \varnothing$, tem-se que

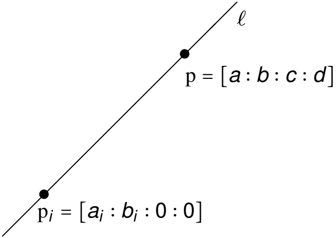
$$\ell \cap \mathrm{L} = \{\mathrm{p}_i\} \quad \textit{para algum } i \in \{1, \ldots, d\}$$

com $\mathrm{p}_i = [a_i : b_i : 0 : 0]$ e $\phi(a_i, b_i) = 0$.

Lembremos (mais uma vez) que toda reta é determinada por dois pontos distintos.

Lembremos (mais uma vez) que toda reta é determinada por dois pontos distintos.

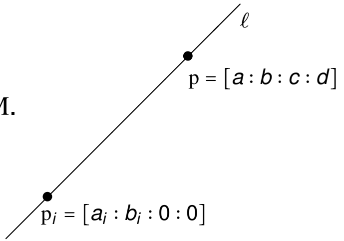
Assim, a reta ℓ será determinada por $\mathrm{p}_i = [a_i : b_i : 0 : 0]$ e $\mathrm{p} = [a : b : c : d]$ (p fixado em ℓ e distinto de p_i).



Lembremos (mais uma vez) que toda reta é determinada por dois pontos distintos.

Assim, a reta ℓ será determinada por $\mathrm{p}_i = [a_i : b_i : 0 : 0]$ e $\mathrm{p} = [a : b : c : d]$ (p fixado em ℓ e distinto de p_i).

Note que, se $a = b = 0$ então $\mathrm{p} \in \ell \cap \mathrm{M}$.



Desafio/Exercício

Se $\mathrm{p} = [p_0 : p_1 : p_2 : p_3]$ e $\mathrm{q} = [q_0 : q_1 : q_2 : q_3]$ são pontos distintos em $\mathbb{P}^3$ então todo ponto da reta que passa pelos pontos p e q se escreve da forma

$$[\alpha \cdot p_0 + \beta \cdot q_0 : \alpha \cdot p_1 + \beta \cdot q_1 : \alpha \cdot p_2 + \beta \cdot q_2 : \alpha \cdot p_3 + \beta \cdot q_3]$$

com α e β números complexos não ambos nulos.

Desafio/Exercício

Se $\mathrm{p} = [p_0 : p_1 : p_2 : p_3]$ e $\mathrm{q} = [q_0 : q_1 : q_2 : q_3]$ são pontos distintos em $\mathbb{P}^3$ então todo ponto da reta que passa pelos pontos p e q se escreve da forma

$$[\alpha \cdot p_0 + \beta \cdot q_0 : \alpha \cdot p_1 + \beta \cdot q_1 : \alpha \cdot p_2 + \beta \cdot q_2 : \alpha \cdot p_3 + \beta \cdot q_3]$$

com α e β números complexos não ambos nulos.

Portanto, sendo a reta ℓ determinada pelos pontos

$$\mathrm{p}_i = [a_i : b_i : 0 : 0] \quad \text{e} \quad \mathrm{p} = [a : b : c : d],$$

segue que todo ponto na reta ℓ se escreve da forma

$$[\alpha \cdot a_i + \beta \cdot a : \alpha \cdot b_i + \beta \cdot b : \beta \cdot c : \beta \cdot d]$$

com α e $\beta \in \mathbb{C}$ não ambos nulos.

Afirmação: $\ell \cap \mathrm{M} \neq \varnothing \iff a \cdot b_i - b \cdot a_i = 0.$

Afirmação: $\ell \cap \mathrm{M} \neq \varnothing \iff a \cdot b_i - b \cdot a_i = 0.$

$\boxed{\Longrightarrow}$ Lembremos que os pontos da reta ℓ são da forma

$$[\alpha \cdot a_i + \beta \cdot a : \alpha \cdot b_i + \beta \cdot b : \beta \cdot c : \beta \cdot d] \qquad (\heartsuit)$$

com α e $\beta \in \mathbb{C}$ não ambos nulos.

Afirmação: $\ell \cap \mathrm{M} \neq \varnothing \iff a \cdot b_i - b \cdot a_i = 0.$

$\boxed{\Longrightarrow}$ Lembremos que os pontos da reta ℓ são da forma

$$[\alpha \cdot a_i + \beta \cdot a : \alpha \cdot b_i + \beta \cdot b : \beta \cdot c : \beta \cdot d] \qquad (\heartsuit)$$

com α e $\beta \in \mathbb{C}$ não ambos nulos.

Se $\ell \cap \mathrm{M} \neq \varnothing$ então existem α e $\beta \in \mathbb{C}$ não ambos nulos tais que

$$\begin{cases} \alpha \cdot a_i + \beta \cdot a = 0 \\ \alpha \cdot b_i + \beta \cdot b = 0 \end{cases}$$

Afirmação: $\ell \cap \mathrm{M} \neq \varnothing \iff a \cdot b_i - b \cdot a_i = 0.$

$\boxed{\Longrightarrow}$ Lembremos que os pontos da reta ℓ são da forma

$$[\alpha \cdot a_i + \beta \cdot a : \alpha \cdot b_i + \beta \cdot b : \beta \cdot c : \beta \cdot d] \qquad (\heartsuit)$$

com α e $\beta \in \mathbb{C}$ não ambos nulos.

Se $\ell \cap \mathrm{M} \neq \varnothing$ então existem α e $\beta \in \mathbb{C}$ não ambos nulos tais que

$$\begin{cases} \alpha \cdot a_i + \beta \cdot a = 0 \\ \alpha \cdot b_i + \beta \cdot b = 0 \end{cases} \Longrightarrow \alpha(a \cdot b_i - b \cdot a_i) = 0 \quad e \quad \beta(a \cdot b_i - b \cdot a_i) = 0.$$

De onde concluímos que

Afirmação: $\ell \cap \mathrm{M} \neq \varnothing \iff a \cdot b_i - b \cdot a_i = 0.$

$\boxed{\Longrightarrow}$ Lembremos que os pontos da reta ℓ são da forma

$$[\alpha \cdot a_i + \beta \cdot a : \alpha \cdot b_i + \beta \cdot b : \beta \cdot c : \beta \cdot d] \qquad (\heartsuit)$$

com α e $\beta \in \mathbb{C}$ não ambos nulos.

Se $\ell \cap \mathrm{M} \neq \varnothing$ então existem α e $\beta \in \mathbb{C}$ não ambos nulos tais que

$$\begin{cases} \alpha \cdot a_i + \beta \cdot a = 0 \\ \alpha \cdot b_i + \beta \cdot b = 0 \end{cases} \Longrightarrow \alpha(a \cdot b_i - b \cdot a_i) = 0 \quad e \quad \beta(a \cdot b_i - b \cdot a_i) = 0.$$

De onde concluímos que $\quad a \cdot b_i - b \cdot a_i = 0.$

Afirmação: $\ell \cap \mathrm{M} \neq \varnothing \iff a \cdot b_i - b \cdot a_i = 0.$

$\boxed{\Longrightarrow}$ Lembremos que os pontos da reta ℓ são da forma

$$[\alpha \cdot a_i + \beta \cdot a : \alpha \cdot b_i + \beta \cdot b : \beta \cdot c : \beta \cdot d] \qquad (\heartsuit)$$

com α e $\beta \in \mathbb{C}$ não ambos nulos.

Se $\ell \cap \mathrm{M} \neq \varnothing$ então existem α e $\beta \in \mathbb{C}$ não ambos nulos tais que

$$\begin{cases} \alpha \cdot a_i + \beta \cdot a = 0 \\ \alpha \cdot b_i + \beta \cdot b = 0 \end{cases} \Longrightarrow \alpha(a \cdot b_i - b \cdot a_i) = 0 \quad e \quad \beta(a \cdot b_i - b \cdot a_i) = 0.$$

De onde concluímos que $\quad a \cdot b_i - b \cdot a_i = 0.$

$\boxed{\Longleftarrow}$ Sabemos que $a \cdot b_i - b \cdot a_i = 0$ implica em $(a, b) = (\lambda \cdot a_i, \lambda \cdot b_i)$

Afirmação: $\ell \cap \mathrm{M} \neq \varnothing \iff a \cdot b_i - b \cdot a_i = 0.$

$\boxed{\Longrightarrow}$ Lembremos que os pontos da reta ℓ são da forma

$$[\alpha \cdot a_i + \beta \cdot a : \alpha \cdot b_i + \beta \cdot b : \beta \cdot c : \beta \cdot d] \qquad (\heartsuit)$$

com α e $\beta \in \mathbb{C}$ não ambos nulos.

Se $\ell \cap \mathrm{M} \neq \varnothing$ então existem α e $\beta \in \mathbb{C}$ não ambos nulos tais que

$$\begin{cases} \alpha \cdot a_i + \beta \cdot a = 0 \\ \alpha \cdot b_i + \beta \cdot b = 0 \end{cases} \Longrightarrow \alpha(a \cdot b_i - b \cdot a_i) = 0 \quad e \quad \beta(a \cdot b_i - b \cdot a_i) = 0.$$

De onde concluímos que $a \cdot b_i - b \cdot a_i = 0.$

$\boxed{\Longleftarrow}$ Sabemos que $a \cdot b_i - b \cdot a_i = 0$ implica em $(a, b) = (\lambda \cdot a_i, \lambda \cdot b_i)$

Assim, ao substituirmos $\beta = 1$ e $\alpha = -\lambda$ em $(\heartsuit)$ concluímos que o ponto $[0 : 0 : c : d] \in \ell \cap \mathrm{M}.$

A seguir, vamos supor, por absurdo, que $\ell \cap \mathrm{M} = \varnothing$.

A seguir, vamos supor, por absurdo, que $\ell \cap \mathrm{M} = \varnothing$. Assim, $a \cdot b_i - b \cdot a_i \neq 0$.

A seguir, vamos supor, por absurdo, que $\ell \cap \mathrm{M} = \varnothing$. Assim, $a \cdot b_i - b \cdot a_i \neq 0$.

O que nos permite definir o isomorfismo linear

$$T : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$$

dado por: $$(\alpha, \beta) \longmapsto (a_i \cdot \alpha + a \cdot \beta, b_i \cdot \alpha + b \cdot \beta) \equiv \begin{bmatrix} a_i & a \\ b_i & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}.$$

A seguir, vamos supor, por absurdo, que $\ell \cap \mathrm{M} = \varnothing$. Assim, $a \cdot b_i - b \cdot a_i \neq 0$.

O que nos permite definir o isomorfismo linear

$$T : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$$

dado por: $$(\alpha, \beta) \longmapsto (a_i \cdot \alpha + a \cdot \beta, b_i \cdot \alpha + b \cdot \beta) \equiv \begin{bmatrix} a_i & a \\ b_i & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}.$$

Exercício

$T^{-1}(r, s) = (a_i \cdot b - a \cdot b_i) \cdot (b \cdot r - a \cdot s, a_i \cdot s - b_i \cdot r)$.
Ou seja,

$$T^{-1}(r, s) \equiv (a_i \cdot b - a \cdot b_i) \begin{bmatrix} b & -a \\ -b_i & a_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix}.$$

A seguir, vamos supor, por absurdo, que $\ell \cap \mathrm{M} = \varnothing$. Assim, $a \cdot b_i - b \cdot a_i \neq 0$.

O que nos permite definir o isomorfismo linear

$$T : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$$

dado por: $$(\alpha, \beta) \longmapsto (a_i \cdot \alpha + a \cdot \beta, b_i \cdot \alpha + b \cdot \beta) \equiv \begin{bmatrix} a_i & a \\ b_i & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}.$$

Exercício

$T^{-1}(r, s) = (a_i \cdot b - a \cdot b_i) \cdot (b \cdot r - a \cdot s, a_i \cdot s - b_i \cdot r)$.
Ou seja,

$$T^{-1}(r, s) \equiv (a_i \cdot b - a \cdot b_i) \begin{bmatrix} b & -a \\ -b_i & a_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix}.$$

Assim,

$T(\alpha, \beta) = (r, s) \Longleftrightarrow \alpha = (a_i \cdot b - a \cdot b_i) \cdot (b \cdot r - a \cdot s)$ e $\beta = (a_i \cdot b - a \cdot b_i) \cdot (a_i \cdot s - b_i \cdot r)$.

Observemos que

$\ell \subset \mathcal{S}_\phi = \mathcal{Z}(F)$ com $F = \phi(x,y) - \phi(z,t)$ implica em

Observemos que

$\ell \subset \mathcal{S}_\phi = \mathcal{Z}(F)$ com $F = \phi(x, y) - \phi(z, t)$ implica em

$$F(\alpha \cdot a_i + \beta \cdot a, \alpha \cdot b_i + \beta \cdot b, \beta \cdot c, \beta \cdot d) = 0 \quad \forall\ (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2.$$

Observemos que

$\ell \subset \mathcal{S}_\phi = \mathcal{Z}(F)$ com $F = \phi(x,y) - \phi(z,t)$ implica em

$$F(\alpha \cdot a_i + \beta \cdot a, \alpha \cdot b_i + \beta \cdot b, \beta \cdot c, \beta \cdot d) = 0 \quad \forall\ (\alpha,\beta) \in \mathbb{C}^2.$$

Ou seja,

$$\phi(\alpha \cdot a_i + \beta \cdot a, \alpha \cdot b_i + \beta \cdot b) - \phi(\beta \cdot c, \beta \cdot d) = 0 \quad \forall\ (\alpha,\beta) \in \mathbb{C}^2.$$

Observemos que

$\ell \subset \mathcal{S}_\phi = \mathcal{Z}(F)$ com $F = \phi(x,y) - \phi(z,t)$ implica em

$$F(\alpha \cdot a_i + \beta \cdot a, \alpha \cdot b_i + \beta \cdot b, \beta \cdot c, \beta \cdot d) = 0 \quad \forall\ (\alpha,\beta) \in \mathbb{C}^2.$$

Ou seja,

$$\phi(\alpha \cdot a_i + \beta \cdot a, \alpha \cdot b_i + \beta \cdot b) - \phi(\beta \cdot c, \beta \cdot d) = 0 \quad \forall\ (\alpha,\beta) \in \mathbb{C}^2.$$

Assim,

$$\phi(T(\alpha,\beta)) - \beta^d \phi(c,d) = 0 \quad \forall\ (\alpha,\beta) \in \mathbb{C}^2.$$

visto que $\phi(u,v) = (a_1 v - b_1 u) \cdot (a_2 v - b_2 u) \cdots (a_d v - b_d u)$.

Observemos que

$\ell \subset \mathcal{S}_\phi = \mathcal{Z}(F)$ com $F = \phi(x,y) - \phi(z,t)$ implica em

$$F(\alpha \cdot a_i + \beta \cdot a, \alpha \cdot b_i + \beta \cdot b, \beta \cdot c, \beta \cdot d) = 0 \quad \forall\ (\alpha,\beta) \in \mathbb{C}^2.$$

Ou seja,

$$\phi(\alpha \cdot a_i + \beta \cdot a, \alpha \cdot b_i + \beta \cdot b) - \phi(\beta \cdot c, \beta \cdot d) = 0 \quad \forall\ (\alpha,\beta) \in \mathbb{C}^2.$$

Assim,

$$\phi(T(\alpha,\beta)) - \beta^d \phi(c,d) = 0 \quad \forall\ (\alpha,\beta) \in \mathbb{C}^2.$$

visto que $\phi(u,v) = (a_1 v - b_1 u) \cdot (a_2 v - b_2 u) \cdots (a_d v - b_d u)$.

Ao fazermos, $T(\alpha,\beta) = (r,s)$ segue que

$$\phi(r,s) - \beta^d \phi(c,d) = 0 \quad \forall\ (r,s) \in \mathbb{C}^2.$$

com $\beta = (a_i \cdot b - a \cdot b_i) \cdot (s \cdot a_i - r \cdot b_i)$.

De onde concluímos que

$$\phi(u,v) = \phi(c,d)\cdot(a_i\cdot b - a\cdot b_i)^d\cdot(v\cdot a_i - u\cdot b_i)^d \in \mathbb{C}[u,v].$$

De onde concluímos que

$$\phi(u,v) = \phi(c,d)\cdot(a_i\cdot b - a\cdot b_i)^d\cdot(v\cdot a_i - u\cdot b_i)^d \in \mathbb{C}[u,v].$$

Vamos focar nossa atenção no valor de $\phi(c,d)$

De onde concluímos que

$$\phi(u,v) = \phi(c,d) \cdot (a_i \cdot b - a \cdot b_i)^d \cdot (v \cdot a_i - u \cdot b_i)^d \in \mathbb{C}[u,v].$$

Vamos focar nossa atenção no valor de $\phi(c,d)$

- Se $\phi(c,d) = 0$ então $\phi(u,v) = 0$ é o polinômio nulo!

De onde concluímos que

$$\phi(u,v) = \phi(c,d)\cdot(a_i\cdot b - a\cdot b_i)^d\cdot(v\cdot a_i - u\cdot b_i)^d \in \mathbb{C}[u,v].$$

Vamos focar nossa atenção no valor de $\phi(c,d)$

- Se $\phi(c,d) = 0$ então $\phi(u,v) = 0$ é o polinômio nulo! Absurdo!

De onde concluímos que

$$\phi(u,v) = \phi(c,d)\cdot(a_i\cdot b - a\cdot b_i)^d\cdot(v\cdot a_i - u\cdot b_i)^d \in \mathbb{C}[u,v].$$

Vamos focar nossa atenção no valor de $\phi(c,d)$

- Se $\phi(c,d) = 0$ então $\phi(u,v) = 0$ é o polinômio nulo! Absurdo!
- Se $\phi(c,d) \neq 0$ então

$$\phi(u,v) = \underbrace{\phi(c,d)\cdot(a_i\cdot b - a\cdot b_i)^d}_{\text{constante não nula}}\cdot\underbrace{(v\cdot a_i - u\cdot b_i)^d}_{\textit{d fatores repetidos}}$$

De onde concluímos que

$$\phi(u,v) = \phi(c,d)\cdot(a_i\cdot b - a\cdot b_i)^d\cdot(v\cdot a_i - u\cdot b_i)^d \in \mathbb{C}[u,v].$$

Vamos focar nossa atenção no valor de $\phi(c,d)$

- Se $\phi(c,d) = 0$ então $\phi(u,v) = 0$ é o polinômio nulo! Absurdo!
- Se $\phi(c,d) \neq 0$ então

$$\phi(u,v) = \underbrace{\phi(c,d)\cdot(a_i\cdot b - a\cdot b_i)^d}_{\text{constante não nula}}\cdot\underbrace{(v\cdot a_i - u\cdot b_i)^d}_{d\ \textit{fatores repetidos}}$$

Como cada fator determina um zero de ϕ em $\mathbb{P}^1$ segue que $\mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(\phi) = \{[a_i : b_i]\}$ consiste de um único ponto!

De onde concluímos que

$$\phi(u,v) = \phi(c,d)\cdot(a_i\cdot b - a\cdot b_i)^d\cdot(v\cdot a_i - u\cdot b_i)^d \in \mathbb{C}[u,v].$$

Vamos focar nossa atenção no valor de $\phi(c,d)$

- Se $\phi(c,d) = 0$ então $\phi(u,v) = 0$ é o polinômio nulo! Absurdo!
- Se $\phi(c,d) \neq 0$ então

$$\phi(u,v) = \underbrace{\phi(c,d)\cdot(a_i\cdot b - a\cdot b_i)^d}_{\text{constante não nula}}\cdot\underbrace{(v\cdot a_i - u\cdot b_i)^d}_{d \textit{ fatores repetidos}}$$

Como cada fator determina um zero de ϕ em $\mathbb{P}^1$ segue que $\mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(\phi) = \{[a_i : b_i]\}$ consiste de um único ponto! Absurdo!
(pois estamos considerando d pontos distintos e $d \geq 2$).

De onde concluímos que

$$\phi(u,v) = \phi(c,d)\cdot(a_i\cdot b - a\cdot b_i)^d\cdot(v\cdot a_i - u\cdot b_i)^d \in \mathbb{C}[u,v].$$

Vamos focar nossa atenção no valor de $\phi(c,d)$

- Se $\phi(c,d) = 0$ então $\phi(u,v) = 0$ é o polinômio nulo! Absurdo!
- Se $\phi(c,d) \neq 0$ então

$$\phi(u,v) = \underbrace{\phi(c,d)\cdot(a_i\cdot b - a\cdot b_i)^d}_{\text{constante não nula}}\cdot\underbrace{(v\cdot a_i - u\cdot b_i)^d}_{d\ \textit{fatores repetidos}}$$

Como cada fator determina um zero de ϕ em $\mathbb{P}^1$ segue que $\mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(\phi) = \{[a_i : b_i]\}$ consiste de um único ponto! Absurdo!
(pois estamos considerando d pontos distintos e $d \geq 2$).

Portanto, $\ell \cap \mathrm{M} \neq \varnothing$.

∎

Recapitulando. Mostramos que

Recapitulando. Mostramos que

Se $\ell \in \mathcal{L}_\phi = \left\{\ell \subset \mathcal{S}_\phi \mid \ell \cap \mathrm{L} \neq \varnothing\right\}$ então $\ell \cap \mathrm{L} = \{\mathrm{p}_i\}$ para algum *i*.

Recapitulando. Mostramos que

Se $\ell \in \mathcal{L}_\phi = \left\{\ell \subset \mathcal{S}_\phi \mid \ell \cap \mathrm{L} \neq \varnothing\right\}$ então $\ell \cap \mathrm{L} = \{\mathrm{p}_i\}$ para algum i.

Entretanto, a Proposição 2 nos garante que

$$\ell \cap \mathrm{L} \neq \varnothing \Longleftrightarrow \ell \cap \mathbf{M} \neq \varnothing$$

Recapitulando. Mostramos que

Se $\ell \in \mathcal{L}_\phi = \left\{ \ell \subset \mathcal{S}_\phi \mid \ell \cap \mathrm{L} \neq \varnothing \right\}$ então $\ell \cap \mathrm{L} = \{\mathrm{p}_i\}$ para algum i.

Entretanto, a Proposição 2 nos garante que

$$\ell \cap \mathrm{L} \neq \varnothing \Longleftrightarrow \ell \cap \mathrm{M} \neq \varnothing$$

Assim, $\ell \cap \mathrm{M} \neq \varnothing$.

Recapitulando. Mostramos que

Se $\ell \in \mathcal{L}_\phi = \left\{\ell \subset \mathcal{S}_\phi \mid \ell \cap \mathrm{L} \neq \varnothing\right\}$ então $\ell \cap \mathrm{L} = \{\mathrm{p}_i\}$ para algum *i*.

Entretanto, a Proposição 2 nos garante que

$$\ell \cap \mathrm{L} \neq \varnothing \Longleftrightarrow \ell \cap \mathrm{M} \neq \varnothing$$

Assim, $\ell \cap \mathrm{M} \neq \varnothing$. Logo,

$$\ell \cap \mathrm{M} = \{\mathrm{q}_j\} \quad \text{para algum } j \quad \Longrightarrow \quad \ell = \ell_{i,j}.$$

Recapitulando. Mostramos que

Se $\ell \in \mathcal{L}_\phi = \left\{\ell \subset \mathcal{S}_\phi \mid \ell \cap \mathrm{L} \neq \varnothing\right\}$ então $\ell \cap \mathrm{L} = \{\mathrm{p}_i\}$ para algum i.

Entretanto, a Proposição 2 nos garante que

$$\ell \cap \mathrm{L} \neq \varnothing \Longleftrightarrow \ell \cap \mathrm{M} \neq \varnothing$$

Assim, $\ell \cap \mathrm{M} \neq \varnothing$. Logo,

$$\ell \cap \mathrm{M} = \{\mathrm{q}_j\} \quad \text{para algum } j \quad \Longrightarrow \quad \ell = \ell_{i,j}.$$

Portanto,

$$\mathcal{L}_\phi = \left\{\ell \subset \mathcal{S}_\phi \mid \ell \cap \mathrm{L} \neq \varnothing\right\} = \left\{\ell_{i,j} \mid 1 \leq i, j \leq d\right\}.$$

Recapitulando. Mostramos que

Se $\ell \in \mathcal{L}_\phi = \left\{\ell \subset \mathcal{S}_\phi \mid \ell \cap \mathrm{L} \neq \varnothing\right\}$ então $\ell \cap \mathrm{L} = \{\mathrm{p}_i\}$ para algum i.

Entretanto, a Proposição 2 nos garante que

$$\ell \cap \mathrm{L} \neq \varnothing \Longleftrightarrow \ell \cap \mathrm{M} \neq \varnothing$$

Assim, $\ell \cap \mathrm{M} \neq \varnothing$. Logo,

$$\ell \cap \mathrm{M} = \{\mathrm{q}_j\} \quad \text{para algum } j \quad \Longrightarrow \quad \ell = \ell_{i,j}.$$

Portanto,

$$\mathcal{L}_\phi = \left\{\ell \subset \mathcal{S}_\phi \mid \ell \cap \mathrm{L} \neq \varnothing\right\} = \left\{\ell_{i,j} \mid 1 \leq i, j \leq d\right\}.$$

De onde, concluímos que $\mid \mathcal{L}_\phi \mid = d^2$.

Tendo em consideração que

$$n_\phi = \left|\left\{\text{ retas contidas em } \mathcal{S}_\phi \right\}\right| = |\mathcal{L}_\phi| + |\mathcal{L}'_\phi|.$$

Tendo em consideração que

$$n_\phi = \left| \left\{ \text{retas contidas em } \mathcal{S}_\phi \right\} \right| = |\mathcal{L}_\phi| + |\mathcal{L}'_\phi|.$$

Concluímos que

$$n_\phi = d^2 + |\mathcal{L}'_\phi|.$$

Tendo em consideração que

$$n_\phi = \left|\left\{ \text{retas contidas em } \mathcal{S}_\phi \right\}\right| = |\mathcal{L}_\phi| + |\mathcal{L}'_\phi|.$$

Concluímos que

$$n_\phi = d^2 + |\mathcal{L}'_\phi|.$$

Próxima aula

Vamos abordar o cálculo de $|\mathcal{L}'_\phi|$.