

Os 5 sólidos platônicos e a busca pelo número de retas numa superfície projetiva

Sally Andria Vieira da Silva (UFF)
e
Jacqueline Fabiola Rojas Arancibia (UFPB)

ESCOLA DE VERÃO 2021
DM-UFPB

AULA 4, 08 de fevereiro de 2021

- Como contar as retas contidas na superfície \mathcal{S}_ϕ ?
- Iniciando a contagem.

Lembretes e notações

$\text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \mathbb{P}^1 \supset$ pontos zeros
 $[1:1] \quad [2:3]$
 $\phi \in \mathbb{C}[u, v]$ Polinômios

$$[1:1] \longleftrightarrow Z(u-v)$$

$$[2:3] \longleftrightarrow Z(3u-2v)$$

$$[a:b] \longleftrightarrow Z(b \cdot u - a \cdot v)$$

$$\phi = u^2 - v^2$$

$$[r:s] \in Z(u^2 - v^2) \iff$$

$$\begin{aligned}
 Z(u^2 - v^2) &= \{ [s:s], [-s:s] \} \\
 &= \{ [1:1], [-1:1] \}
 \end{aligned}$$



$$r^2 - s^2 = 0$$

$$r^2 = s^2$$

$$r = s \text{ ou } r = -s$$

\uparrow_{10}

\uparrow_{20}

Lembretes e notações

\mathbb{P}^3



Planos

retos



superfícies

$$Z(f) \cap Z(g) = Z(f, g) \quad Z(g)$$

$$f, g \in \mathbb{C}[x, y, z, t]$$

Ex) Planos $Z(x-y), Z(y-2z+8t)$

$x=0, y=0$ Retas $Z(x, y), Z(x, 2x), Z(z, t)$
~~X não é reto~~

Sup $Z(xy-zt), Z(x^3+y^3-z^3-t^3)$

Observe que

a partir de d pontos distintos na reta projetiva, digamos, x_1, \dots, x_d

$$\bullet \quad \bullet \quad \dots \quad \bullet$$
$$x_1 = [a_1 : b_1] \quad x_2 = [a_2 : b_2] \quad \dots \quad x_d = [a_d : b_d]$$

obtemos o polinômio homogêneo de grau d

$$\phi(u, v) = (a_1 v - b_1 u) \cdot (a_2 v - b_2 u) \cdots (a_d v - b_d u) \in \mathbb{C}[u, v].$$

$$\cancel{a_d b_d - b_d a_d} = 0$$

Observe que

a partir de d pontos distintos na reta projetiva, digamos, x_1, \dots, x_d

$$\begin{array}{c} \bullet \qquad \qquad \qquad \bullet \qquad \qquad \qquad \dots \qquad \qquad \qquad \bullet \\ \hline x_1 = [a_1 : b_1] \quad x_2 = [a_2 : b_2] \quad \dots \quad x_d = [a_d : b_d] \end{array}$$

obtemos o polinômio homogêneo de grau d

$$\phi(u, v) = (a_1 v - b_1 u) \cdot (a_2 v - b_2 u) \cdots (a_d v - b_d u) \in \mathbb{C}[u, v].$$

Ao qual associamos a **superfície não singular**

$$\mathcal{S}_\phi = \mathcal{Z}(\phi(x, y) - \phi(z, t)) \subset \mathbb{P}^3.$$

Considere a reta $L = \mathcal{Z}(z, t)$ em \mathbb{P}^3 .

Para cada reta ℓ contida na superfície \mathcal{S}_ϕ , temos duas possibilidades:

Considere a reta $L = \mathcal{Z}(z, t)$ em \mathbb{P}^3 .

Para cada reta ℓ contida na superfície \mathcal{S}_ϕ , temos duas possibilidades:

$$\ell \cap L \neq \emptyset \quad \text{ou} \quad \ell \cap L = \emptyset.$$

Considere a reta $L = \mathcal{Z}(z, t)$ em \mathbb{P}^3 .

Para cada reta ℓ contida na superfície \mathcal{S}_ϕ , temos duas possibilidades:

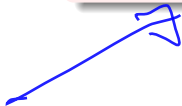
$$\ell \cap L \neq \emptyset \quad \text{ou} \quad \ell \cap L = \emptyset.$$

Assim, os conjuntos:

$$\mathcal{L}_\phi = \{\ell \subset \mathcal{S}_\phi \mid \ell \cap L \neq \emptyset\} \quad \text{e} \quad \mathcal{L}'_\phi = \{\ell \subset \mathcal{S}_\phi \mid \ell \cap L = \emptyset\},$$

determinam uma partição do conjunto constituído por todas as retas na superfície \mathcal{S}_ϕ , ou seja,

$$\{\ell \mid \ell \text{ é uma reta contida na superfície } \mathcal{S}_\phi\} = \mathcal{L}_\phi \cup \mathcal{L}'_\phi$$



Considere a reta $L = \mathcal{Z}(z, t)$ em \mathbb{P}^3 .

Para cada reta ℓ contida na superfície \mathcal{S}_ϕ , temos duas possibilidades:

$$\ell \cap L \neq \emptyset \quad \text{ou} \quad \ell \cap L = \emptyset.$$

Assim, os conjuntos:

$$\mathcal{L}_\phi = \{\ell \subset \mathcal{S}_\phi \mid \ell \cap L \neq \emptyset\} \quad \text{e} \quad \mathcal{L}'_\phi = \{\ell \subset \mathcal{S}_\phi \mid \ell \cap L = \emptyset\},$$

determinam uma partição do conjunto constituído por todas as retas na superfície \mathcal{S}_ϕ , ou seja,

$$\{\ell \mid \ell \text{ é uma reta contida na superfície } \mathcal{S}_\phi\} = \mathcal{L}_\phi \cup \mathcal{L}'_\phi$$

Assim,

$$n_\phi = \left| \left\{ \text{retas contidas em } \mathcal{S}_\phi \right\} \right| = |\mathcal{L}_\phi| + |\mathcal{L}'_\phi|.$$

A seguir, vamos calcular $|\mathcal{L}_\phi|$.

Começemos com algumas observações:

A seguir, vamos calcular $|\mathcal{L}_\phi|$.

Começemos com algumas observações:

- Lembre que $[a : b] \in \mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(\phi) \iff \phi(a, b) = 0$.

A seguir, vamos calcular $|\mathcal{L}_\phi|$.

Comecemos com algumas observações:

- Lembre que $[a : b] \in \mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(\phi) \iff \phi(a, b) = 0$. Logo, se

$$\phi(u, v) = (a_1 v - b_1 u) \cdot (a_2 v - b_2 u) \cdots (a_d v - b_d u) \in \mathbb{C}[u, v],$$

então segue que $\mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(\phi) = \{x_1, x_2, \dots, x_d\}$, com $x_i = [a_i : b_i]$ e $\phi(0, 0) = 0$.

A seguir, vamos calcular $|\mathcal{L}_\phi|$.

Comecemos com algumas observações:

- Lembre que $[a : b] \in \mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(\phi) \iff \phi(a, b) = 0$. Logo, se

$$\phi(u, v) = (a_1 v - b_1 u) \cdot (a_2 v - b_2 u) \cdots (a_d v - b_d u) \in \mathbb{C}[u, v],$$

então segue que $\mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(\phi) = \{x_1, x_2, \dots, x_d\}$, com $x_i = [a_i : b_i]$ e $\phi(0, 0) = 0$.

- Se $p = [a : b : c : d] \in \mathbb{P}^3$ tem-se que

$$p \in \mathcal{S}_\phi = \mathcal{Z}(\phi(x, y) - \phi(z, t)) \iff \phi(a, b) - \phi(c, d) = 0$$

A seguir, vamos calcular $|\mathcal{L}_\phi|$.

Comecemos com algumas observações:

- Lembre que $[a : b] \in \mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(\phi) \iff \phi(a, b) = 0$. Logo, se

$$\phi(u, v) = (a_1 v - b_1 u) \cdot (a_2 v - b_2 u) \cdots (a_d v - b_d u) \in \mathbb{C}[u, v],$$

então segue que $\mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(\phi) = \{x_1, x_2, \dots, x_d\}$, com $x_i = [a_i : b_i]$ e $\phi(0, 0) = 0$.

- Se $p = [a : b : c : d] \in \mathbb{P}^3$ tem-se que

$$p \in \mathcal{S}_\phi = \mathcal{Z}(\phi(x, y) - \phi(z, t)) \iff \phi(a, b) - \phi(c, d) = 0$$

- Considere as retas $L = \mathcal{Z}(z, t)$ e $M = \mathcal{Z}(x, y)$ em \mathbb{P}^3 . Note que:

A seguir, vamos calcular $|\mathcal{L}_\phi|$.

Comecemos com algumas observações:

- Lembre que $[a : b] \in \mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(\phi) \iff \phi(a, b) = 0$. Logo, se

$$\phi(u, v) = (a_1 v - b_1 u) \cdot (a_2 v - b_2 u) \cdots (a_d v - b_d u) \in \mathbb{C}[u, v],$$

então segue que $\mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(\phi) = \{x_1, x_2, \dots, x_d\}$, com $x_i = [a_i : b_i]$ e $\phi(0, 0) = 0$.

- Se $p = [a : b : c : d] \in \mathbb{P}^3$ tem-se que

$$p \in \mathcal{S}_\phi = \mathcal{Z}(\phi(x, y) - \phi(z, t)) \iff \phi(a, b) - \phi(c, d) = 0$$

- Considere as retas $L = \mathcal{Z}(z, t)$ e $M = \mathcal{Z}(x, y)$ em \mathbb{P}^3 . Note que:

$$p = [a : b : c : d] \in L \cap \mathcal{S}_\phi \iff c = d = 0 \text{ e } \phi(a, b) = 0$$

A seguir, vamos calcular $|\mathcal{L}_\phi|$.

Comecemos com algumas observações:

- Lembre que $[a : b] \in \mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(\phi) \iff \phi(a, b) = 0$. Logo, se

$$\phi(u, v) = (a_1 v - b_1 u) \cdot (a_2 v - b_2 u) \cdots (a_d v - b_d u) \in \mathbb{C}[u, v],$$

então segue que $\mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(\phi) = \{x_1, x_2, \dots, x_d\}$, com $x_i = [a_i : b_i]$ e $\phi(0, 0) = 0$.

- Se $p = [a : b : c : d] \in \mathbb{P}^3$ tem-se que

$$p \in \mathcal{S}_\phi = \mathcal{Z}(\phi(x, y) - \phi(z, t)) \iff \phi(a, b) - \phi(c, d) = 0$$

- Considere as retas $L = \mathcal{Z}(z, t)$ e $M = \mathcal{Z}(x, y)$ em \mathbb{P}^3 . Note que:

$$p = [a : b : c : d] \in L \cap \mathcal{S}_\phi \iff c = d = 0 \text{ e } \phi(a, b) = 0$$

$$p = [a : b : c : d] \in M \cap \mathcal{S}_\phi \iff a = b = 0 \text{ e } \phi(c, d) = 0$$

A seguir, vamos calcular $|\mathcal{L}_\phi|$.

Comecemos com algumas observações:

- Lembre que $[a : b] \in \mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(\phi) \iff \phi(a, b) = 0$. Logo, se

$$\phi(u, v) = (a_1 v - b_1 u) \cdot (a_2 v - b_2 u) \cdots (a_d v - b_d u) \in \mathbb{C}[u, v],$$

então segue que $\mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(\phi) = \{x_1, x_2, \dots, x_d\}$, com $x_i = [a_i : b_i]$ e $\phi(0, 0) = 0$.

- Se $p = [a : b : c : d] \in \mathbb{P}^3$ tem-se que

$$p \in \mathcal{S}_\phi = \mathcal{Z}(\phi(x, y) - \phi(z, t)) \iff \phi(a, b) - \phi(c, d) = 0$$

- Considere as retas $L = \mathcal{Z}(z, t)$ e $M = \mathcal{Z}(x, y)$ em \mathbb{P}^3 . Note que:

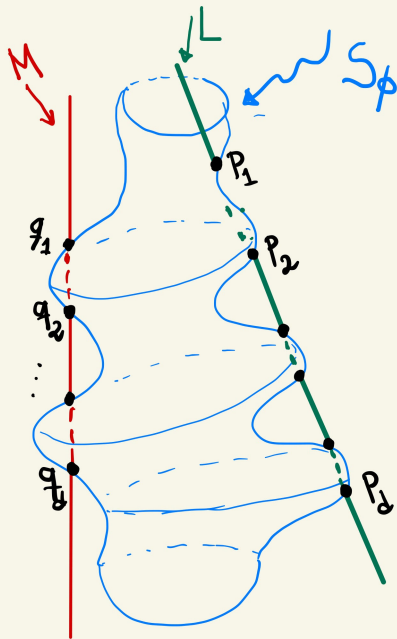
$$p = [a : b : c : d] \in L \cap \mathcal{S}_\phi \iff c = d = 0 \text{ e } \phi(a, b) = 0$$

$$p = [a : b : c : d] \in M \cap \mathcal{S}_\phi \iff a = b = 0 \text{ e } \phi(c, d) = 0$$

Portanto

$$L \cap \mathcal{S}_\phi = \{p_1 = [a_1 : b_1 : 0 : 0], p_2 = [a_2 : b_2 : 0 : 0], \dots, p_d = [a_d : b_d : 0 : 0]\};$$

$$M \cap \mathcal{S}_\phi = \{q_1 = [0 : 0 : a_1 : b_1], q_2 = [0 : 0 : a_2 : b_2], \dots, q_d = [0 : 0 : a_d : b_d]\}.$$



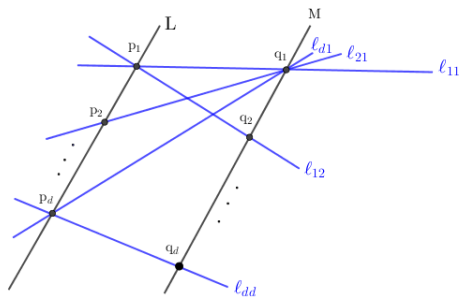
Lembre-se que dois pontos distintos determinam uma única reta.

Lembre-se que dois pontos distintos determinam uma única reta.

Seja $\ell_{i,j}$ a reta que passa pelos pontos p_i e q_j com $i, j \in \{1, \dots, d\}$

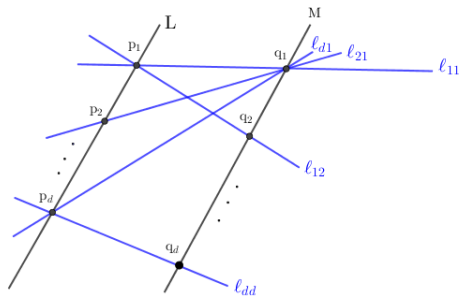
Lembre-se que dois pontos distintos determinam uma única reta.

Seja $\ell_{i,j}$ a reta que passa pelos pontos p_i e q_j com $i, j \in \{1, \dots, d\}$



Lembre-se que dois pontos distintos determinam uma única reta.

Seja $\ell_{i,j}$ a reta que passa pelos pontos p_i e q_j com $i, j \in \{1, \dots, d\}$



Observe que

$$\left| \{ \ell_{i,j} \mid 1 \leq i, j \leq d \} \right| = d^2.$$

Nosso objetivo, a seguir será mostrar que

$$\mathcal{L}_\phi := \{l \subset \mathcal{S}_\phi \mid l \cap L \neq \emptyset\} = \{l_{i,j} \mid 1 \leq i, j \leq d\}.$$

Nosso objetivo, a seguir será mostrar que

$$\mathcal{L}_\phi := \{l \subset \mathcal{S}_\phi \mid l \cap L \neq \emptyset\} = \{l_{i,j} \mid 1 \leq i, j \leq d\}.$$

Proposição 1: Com as notações supracitadas. Se $l_{i,j}$ é a reta que passa por p_i e q_j , então verifica-se que:

Nosso objetivo, a seguir será mostrar que

$$\mathcal{L}_\phi := \{l \subset \mathcal{S}_\phi \mid l \cap L \neq \emptyset\} = \{l_{i,j} \mid 1 \leq i, j \leq d\}.$$

Proposição 1: Com as notações supracitadas. Se $l_{i,j}$ é a reta que passa por p_i e q_j , então verifica-se que:

(i) $l_{i,j} \subset \mathcal{S}_\phi$.

Nosso objetivo, a seguir será mostrar que

$$\mathcal{L}_\phi := \{l \subset \mathcal{S}_\phi \mid l \cap L \neq \emptyset\} = \{l_{i,j} \mid 1 \leq i, j \leq d\}.$$

Proposição 1: Com as notações supracitadas. Se $l_{i,j}$ é a reta que passa por p_i e q_j , então verifica-se que:

- (i) $l_{i,j} \subset \mathcal{S}_\phi$.
- (ii) $\{l_{i,j} \mid 1 \leq i, j \leq d\} \subseteq \mathcal{L}_\phi$. Logo, $|\mathcal{L}_\phi| \geq d^2$.

Nosso objetivo, a seguir será mostrar que

$$\mathcal{L}_\phi := \{l \subset \mathcal{S}_\phi \mid l \cap L \neq \emptyset\} = \{l_{i,j} \mid 1 \leq i, j \leq d\}.$$

Proposição 1: Com as notações supracitadas. Se $l_{i,j}$ é a reta que passa por p_i e q_j , então verifica-se que:

- (i) $l_{i,j} \subset \mathcal{S}_\phi$.
- (ii) $\{l_{i,j} \mid 1 \leq i, j \leq d\} \subseteq \mathcal{L}_\phi$. Logo, $|\mathcal{L}_\phi| \geq d^2$.

Demonstração:

Nosso objetivo, a seguir será mostrar que

$$\mathcal{L}_\phi := \{l \subset \mathcal{S}_\phi \mid l \cap L \neq \emptyset\} = \{l_{i,j} \mid 1 \leq i, j \leq d\}.$$

Proposição 1: Com as notações supracitadas. Se $l_{i,j}$ é a reta que passa por p_i e q_j , então verifica-se que:

(i) $l_{i,j} \subset \mathcal{S}_\phi$.

(ii) $\{l_{i,j} \mid 1 \leq i, j \leq d\} \subseteq \mathcal{L}_\phi$. Logo, $|\mathcal{L}_\phi| \geq d^2$.

Demonstração: Temos $p_i = [a_i : b_i : 0 : 0]$ e $q_j = [0 : 0 : a_j : b_j]$ pontos em \mathbb{P}^3 .

Nosso objetivo, a seguir será mostrar que

$$\mathcal{L}_\phi := \{l \in \mathcal{S}_\phi \mid l \cap L \neq \emptyset\} = \{l_{i,j} \mid 1 \leq i, j \leq d\}.$$

Proposição 1: Com as notações supracitadas. Se $l_{i,j}$ é a reta que passa por p_i e q_j , então verifica-se que:

(i) $l_{i,j} \subset \mathcal{S}_\phi$.

(ii) $\{l_{i,j} \mid 1 \leq i, j \leq d\} \subseteq \mathcal{L}_\phi$. Logo, $|\mathcal{L}_\phi| \geq d^2$.

Demonstração: Temos $p_i = [a_i : b_i : 0 : 0]$ e $q_j = [0 : 0 : a_j : b_j]$ pontos em \mathbb{P}^3 . Observe que

$$f = b_i x - a_i y \quad e \quad g = b_j z - a_j t$$

são polinômios homogêneos de grau 1, linearmente independentes em $\mathbb{C}[x, y, z, t]$.

Nosso objetivo, a seguir será mostrar que

$$\mathcal{L}_\phi := \{l \in \mathcal{S}_\phi \mid l \cap L \neq \emptyset\} = \{l_{i,j} \mid 1 \leq i, j \leq d\}.$$

Proposição 1: Com as notações supracitadas. Se $l_{i,j}$ é a reta que passa por p_i e q_j , então verifica-se que:

(i) $l_{i,j} \subset \mathcal{S}_\phi$.

(ii) $\{l_{i,j} \mid 1 \leq i, j \leq d\} \subseteq \mathcal{L}_\phi$. Logo, $|\mathcal{L}_\phi| \geq d^2$.

Demonstração: Temos $p_i = [a_i : b_i : 0 : 0]$ e $q_j = [0 : 0 : a_j : b_j]$ pontos em \mathbb{P}^3 . Observe que

$$f = b_i x - a_i y \quad e \quad g = b_j z - a_j t$$

são polinômios homogêneos de grau 1, linearmente independentes em $\mathbb{C}[x, y, z, t]$. Logo, $\mathcal{Z}(f, g)$ define uma reta em \mathbb{P}^3 .

Nosso objetivo, a seguir será mostrar que

$$\mathcal{L}_\phi := \{l \in \mathcal{S}_\phi \mid l \cap L \neq \emptyset\} = \{l_{i,j} \mid 1 \leq i, j \leq d\}.$$

Proposição 1: Com as notações supracitadas. Se $l_{i,j}$ é a reta que passa por p_i e q_j , então verifica-se que:

(i) $l_{i,j} \subset \mathcal{S}_\phi$.

(ii) $\{l_{i,j} \mid 1 \leq i, j \leq d\} \subseteq \mathcal{L}_\phi$. Logo, $|\mathcal{L}_\phi| \geq d^2$.

Demonstração: Temos $p_i = [a_i : b_i : 0 : 0]$ e $q_j = [0 : 0 : a_j : b_j]$ pontos em \mathbb{P}^3 . Observe que

$$f = b_i x - a_i y \quad e \quad g = b_j z - a_j t$$

são polinômios homogêneos de grau 1, linearmente independentes em $\mathbb{C}[x, y, z, t]$. Logo, $\mathcal{Z}(f, g)$ define uma reta em \mathbb{P}^3 .

Além disso, os pontos

$$p_i \text{ e } q_j \text{ pertencem ao conjunto } \mathcal{Z}(f) \cap \mathcal{Z}(g) = \mathcal{Z}(f, g).$$

Portanto, $\ell_{i,j} = \mathcal{Z}(f, g) = \mathcal{Z}(b_i x - a_i y, b_j z - a_j t)$ e

$$p = [a : b : c : d] \in \ell_{i,j} \iff \begin{cases} b_i a - a_i b = 0, \\ b_j c - a_j d = 0 \end{cases}$$

Portanto, $\ell_{i,j} = \mathcal{Z}(f, g) = \mathcal{Z}(b_i x - a_i y, b_j z - a_j t)$ e

$$p = [a : b : c : d] \in \ell_{i,j} \iff \begin{cases} b_i a - a_i b = 0, \\ b_j c - a_j d = 0 \end{cases}$$

Lembrete e/ou Exercício

Sejam (u_1, u_2) e (v_1, v_2) vetores em \mathbb{C}^2 tais que (v_1, v_2) é não nulo. Verifica-se que:

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} = u_1 \cdot v_2 - u_2 \cdot v_1 = 0 \iff \exists! \alpha \in \mathbb{C} \text{ tal que } (u_1, u_2) = \alpha(v_1, v_2).$$

Portanto, $\ell_{i,j} = \mathcal{Z}(f, g) = \mathcal{Z}(b_i x - a_i y, b_j z - a_j t)$ e

$$p = [a : b : c : d] \in \ell_{i,j} \iff \begin{cases} b_i a - a_i b = 0, \\ b_j c - a_j d = 0 \end{cases}$$

Lembrete e/ou Exercício

Sejam (u_1, u_2) e (v_1, v_2) vetores em \mathbb{C}^2 tais que (v_1, v_2) é não nulo. Verifica-se que:

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} = u_1 \cdot v_2 - u_2 \cdot v_1 = 0 \iff \exists! \alpha \in \mathbb{C} \text{ tal que } (u_1, u_2) = \alpha(v_1, v_2).$$

Assim, existem $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tais que $(a, b, c, d) = (\alpha \cdot a_i, \alpha \cdot b_i, \beta \cdot a_j, \beta \cdot b_j)$.

Portanto,

$$p = [a : b : c : d] \in \ell_{i,j} \iff p = [\alpha \cdot a_i : \alpha \cdot b_i : \beta \cdot a_j : \beta \cdot b_j] \text{ com } [\alpha : \beta] \in \mathbb{P}^1.$$

Agora estamos preparados para mostrar o item (i) $l_{i,j} \in \mathcal{S}_\phi$

Agora estamos preparados para mostrar o item (i) $l_{i,j} \subset \mathcal{S}_\phi$

(i) Sabemos que $\mathcal{S}_\phi = \mathcal{Z}(F)$ com $F = \phi(x, y) - \phi(z, t)$. Assim,

$$l_{i,j} \subset \mathcal{S}_\phi \iff F(p) = 0 \quad \forall p \in l_{i,j}.$$

Agora estamos preparados para mostrar o item (i) $\ell_{i,j} \subset \mathcal{S}_\phi$

(i) Sabemos que $\mathcal{S}_\phi = \mathcal{Z}(F)$ com $F = \phi(x, y) - \phi(z, t)$. Assim,

$$\ell_{i,j} \subset \mathcal{S}_\phi \iff F(p) = 0 \quad \forall p \in \ell_{i,j}.$$

Se $p \in \ell_{i,j}$ então $p = [\alpha \mathbf{a}_i : \alpha \mathbf{b}_i : \beta \mathbf{a}_j : \beta \mathbf{b}_j]$ com $[\alpha : \beta] \in \mathbb{P}^1$. Logo,

$$F(p) = \phi(\alpha \mathbf{a}_i, \alpha \mathbf{b}_i) - \phi(\beta \mathbf{a}_j, \beta \mathbf{b}_j).$$

Agora estamos preparados para mostrar o item (i) $l_{i,j} \subset \mathcal{S}_\phi$

(i) Sabemos que $\mathcal{S}_\phi = \mathcal{Z}(F)$ com $F = \phi(x, y) - \phi(z, t)$. Assim,

$$l_{i,j} \subset \mathcal{S}_\phi \iff F(p) = 0 \quad \forall p \in l_{i,j}.$$

Se $p \in l_{i,j}$ então $p = [\alpha a_i : \alpha b_i : \beta a_j : \beta b_j]$ com $[\alpha : \beta] \in \mathbb{P}^1$. Logo,

$$F(p) = \phi(\alpha a_i, \alpha b_i) - \phi(\beta a_j, \beta b_j).$$

Lembremos que,

$$\phi(u, v) = (a_1 v - b_1 u) \cdots (a_i v - b_i u) \cdots (a_j v - b_j u) \cdots (a_d v - b_d u).$$

Logo,

$$\phi(\alpha a_i, \alpha b_i) = (a_1 \cdot \alpha b_i - b_1 \cdot \alpha a_i) \cdots (\alpha a_i \cdot \alpha b_i - b_i \cdot \alpha a_i) \cdots (a_d \cdot \alpha b_i - b_d \cdot \alpha a_i) = 0.$$

E analogamente, concluí-se que $\phi(\beta a_j, \beta b_j) = 0$.

Agora estamos preparados para mostrar o item (i) $l_{i,j} \subset \mathcal{S}_\phi$

(i) Sabemos que $\mathcal{S}_\phi = \mathcal{Z}(F)$ com $F = \phi(x, y) - \phi(z, t)$. Assim,

$$l_{i,j} \subset \mathcal{S}_\phi \iff F(p) = 0 \quad \forall p \in l_{i,j}.$$

Se $p \in l_{i,j}$ então $p = [\alpha a_i : \alpha b_i : \beta a_j : \beta b_j]$ com $[\alpha : \beta] \in \mathbb{P}^1$. Logo,

$$F(p) = \phi(\alpha a_i, \alpha b_i) - \phi(\beta a_j, \beta b_j).$$

Lembremos que,

$$\phi(u, v) = (a_1 v - b_1 u) \cdots (a_i v - b_i u) \cdots (a_j v - b_j u) \cdots (a_d v - b_d u).$$

Logo,

$$\phi(\alpha a_i, \alpha b_i) = (a_1 \cdot \alpha b_i - b_1 \cdot \alpha a_i) \cdots (\mathbf{a_i \cdot \alpha b_i - b_i \cdot \alpha a_i}) \cdots (a_d \cdot \alpha b_i - b_d \cdot \alpha a_i) = 0.$$

E analogamente, concluí-se que $\phi(\beta a_j, \beta b_j) = 0$. Assim,

$$F(p) = \phi(\alpha a_i, \alpha b_i) - \phi(\beta a_j, \beta b_j) = 0 \quad \forall [\alpha : \beta] \in \mathbb{P}^1 \implies F(p) = 0 \quad \forall p \in l_{i,j}.$$

Agora estamos preparados para mostrar o item (i) $\ell_{i,j} \subset \mathcal{S}_\phi$

(i) Sabemos que $\mathcal{S}_\phi = \mathcal{Z}(F)$ com $F = \phi(x, y) - \phi(z, t)$. Assim,

$$\ell_{i,j} \subset \mathcal{S}_\phi \iff F(p) = 0 \quad \forall p \in \ell_{i,j}.$$

Se $p \in \ell_{i,j}$ então $p = [\alpha a_i : \alpha b_i : \beta a_j : \beta b_j]$ com $[\alpha : \beta] \in \mathbb{P}^1$. Logo,

$$F(p) = \phi(\alpha a_i, \alpha b_i) - \phi(\beta a_j, \beta b_j).$$

Lembremos que,

$$\phi(u, v) = (a_1 v - b_1 u) \cdots (a_i v - b_i u) \cdots (a_j v - b_j u) \cdots (a_d v - b_d u).$$

Logo,

$$\phi(\alpha a_i, \alpha b_i) = (a_1 \cdot \alpha b_i - b_1 \cdot \alpha a_i) \cdots (\mathbf{a_i \cdot \alpha b_i - b_i \cdot \alpha a_i}) \cdots (a_d \cdot \alpha b_i - b_d \cdot \alpha a_i) = 0.$$

E analogamente, concluí-se que $\phi(\beta a_j, \beta b_j) = 0$. Assim,

$$F(p) = \phi(\alpha a_i, \alpha b_i) - \phi(\beta a_j, \beta b_j) = 0 \quad \forall [\alpha : \beta] \in \mathbb{P}^1 \implies F(p) = 0 \quad \forall p \in \ell_{i,j}.$$

Portanto, $\ell_{i,j} \subset \mathcal{S}_\phi$.

(ii) Agora, vamos mostrar que $\{\ell_{i,j} \mid 1 \leq i, j \leq d\} \subseteq \mathcal{L}_\phi := \{\ell \in \mathcal{S}_\phi \mid \ell \cap L \neq \emptyset\}$.

(ii) Agora, vamos mostrar que $\{\ell_{i,j} \mid 1 \leq i, j \leq d\} \subseteq \mathcal{L}_\phi := \{\ell \in \mathcal{S}_\phi \mid \ell \cap L \neq \emptyset\}$.

Considere a reta $\ell_{i,j}$ e observe que,

$$p_i = [a_i : b_i : 0 : 0] \in L = \mathcal{Z}(z, t) \quad \text{e} \quad p_i \in \ell_{i,j} \quad \text{para quaisquer } j.$$

(ii) Agora, vamos mostrar que $\{\ell_{i,j} \mid 1 \leq i, j \leq d\} \subseteq \mathcal{L}_\phi := \{\ell \in \mathcal{S}_\phi \mid \ell \cap L \neq \emptyset\}$.

Considere a reta $\ell_{i,j}$ e observe que,

$$p_i = [a_i : b_i : 0 : 0] \in L = \mathcal{Z}(z, t) \quad \text{e} \quad p_i \in \ell_{i,j} \quad \text{para quaisquer } j.$$

Portanto,

$$\ell_{ij} \cap L \neq \emptyset.$$

(ii) Agora, vamos mostrar que $\{\ell_{i,j} \mid 1 \leq i, j \leq d\} \subseteq \mathcal{L}_\phi := \{\ell \in \mathcal{S}_\phi \mid \ell \cap L \neq \emptyset\}$.

Considere a reta $\ell_{i,j}$ e observe que,

$$p_i = [a_i : b_i : 0 : 0] \in L = \mathcal{Z}(z, t) \quad \text{e} \quad p_i \in \ell_{i,j} \quad \text{para quaisquer } j.$$

Portanto,

$$\ell_{i,j} \cap L \neq \emptyset.$$

Já mostramos que $\ell_{i,j} \in \mathcal{S}_\phi$. Assim,

$$\ell_{i,j} \in \mathcal{L}_\phi = \{\ell \in \mathcal{S}_\phi \mid \ell \cap L \neq \emptyset\}$$

(ii) Agora, vamos mostrar que $\{\ell_{i,j} \mid 1 \leq i, j \leq d\} \subseteq \mathcal{L}_\phi := \{\ell \in \mathcal{S}_\phi \mid \ell \cap L \neq \emptyset\}$.

Considere a reta $\ell_{i,j}$ e observe que,

$$p_i = [a_i : b_i : 0 : 0] \in L = \mathcal{Z}(z, t) \quad \text{e} \quad p_i \in \ell_{i,j} \quad \text{para quaisquer } j.$$

Portanto,

$$\ell_{ij} \cap L \neq \emptyset.$$

Já mostramos que $\ell_{i,j} \in \mathcal{S}_\phi$. Assim,

$$\ell_{i,j} \in \mathcal{L}_\phi = \{\ell \in \mathcal{S}_\phi \mid \ell \cap L \neq \emptyset\}$$

Portanto, $\{\ell_{i,j} \mid 1 \leq i, j \leq d\} \subseteq \mathcal{L}_\phi$, o que implica em $|\mathcal{L}_\phi| \geq d^2$.



A seguir, mostraremos que $|\mathcal{L}_\phi| = d^2$.

O que nos permitirá concluir que:

$$\mathcal{L}_\phi := \{ \ell \subset \mathcal{S}_\phi \mid \ell \cap \mathbf{L} \neq \emptyset \} = \{ \ell_{i,j} \mid 1 \leq i, j \leq d \}.$$

A seguir, mostraremos que $|\mathcal{L}_\phi| = d^2$.

O que nos permitirá concluir que:

$$\mathcal{L}_\phi := \{l \subset \mathcal{S}_\phi \mid l \cap \mathbf{L} \neq \emptyset\} = \{l_{i,j} \mid 1 \leq i, j \leq d\}.$$

Considere uma reta l contida na superfície \mathcal{S}_ϕ . Note que:

A seguir, mostraremos que $|\mathcal{L}_\phi| = d^2$.

O que nos permitirá concluir que:

$$\mathcal{L}_\phi := \{l \subset \mathcal{S}_\phi \mid l \cap L \neq \emptyset\} = \{l_{i,j} \mid 1 \leq i, j \leq d\}.$$

Considere uma reta l contida na superfície \mathcal{S}_ϕ . Note que:

- $l \neq L = \mathcal{Z}(z, t)$

A seguir, mostraremos que $|\mathcal{L}_\phi| = d^2$.

O que nos permitirá concluir que:

$$\mathcal{L}_\phi := \{l \subset \mathcal{S}_\phi \mid l \cap L \neq \emptyset\} = \{l_{i,j} \mid 1 \leq i, j \leq d\}.$$

Considere uma reta l contida na superfície \mathcal{S}_ϕ . Note que:

- $l \cap L = \mathcal{Z}(z, t)$
- Se $l \cap L \neq \emptyset$ então $l \cap L$ consiste de um único ponto.

A seguir, mostraremos que $|\mathcal{L}_\phi| = d^2$.

O que nos permitirá concluir que:

$$\mathcal{L}_\phi := \{l \subset \mathcal{S}_\phi \mid l \cap L \neq \emptyset\} = \{l_{i,j} \mid 1 \leq i, j \leq d\}.$$

Considere uma reta l contida na superfície \mathcal{S}_ϕ . Note que:

- $l \cap L = \mathcal{Z}(z, t)$
- Se $l \cap L \neq \emptyset$ então $l \cap L$ consiste de um único ponto.
- Se $p \in l \cap L$ então $p = [a : b : 0 : 0]$ e $p \in \mathcal{S}_\phi = \mathcal{Z}(\phi(x, y) - \phi(z, t))$.

A seguir, mostraremos que $|\mathcal{L}_\phi| = d^2$.

O que nos permitirá concluir que:

$$\mathcal{L}_\phi := \{l \subset \mathcal{S}_\phi \mid l \cap L \neq \emptyset\} = \{l_{i,j} \mid 1 \leq i, j \leq d\}.$$

Considere uma reta l contida na superfície \mathcal{S}_ϕ . Note que:

- $l \neq L = \mathcal{Z}(z, t)$
- Se $l \cap L \neq \emptyset$ então $l \cap L$ consiste de um único ponto.
- Se $p \in l \cap L$ então $p = [a : b : 0 : 0]$ e $p \in \mathcal{S}_\phi = \mathcal{Z}(\phi(x, y) - \phi(z, t))$. Logo,

$$\phi(a, b) = 0 \implies [a : b] \in \mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(\phi) = \{[a_i : b_i]\}_{i=1}^d \implies p = p_i \text{ para algum } i.$$

A seguir, mostraremos que $|\mathcal{L}_\phi| = d^2$.

O que nos permitirá concluir que:

$$\mathcal{L}_\phi := \{l \subset \mathcal{S}_\phi \mid l \cap L \neq \emptyset\} = \{l_{i,j} \mid 1 \leq i, j \leq d\}.$$

Considere uma reta l contida na superfície \mathcal{S}_ϕ . Note que:

- $l \neq L = \mathcal{Z}(z, t)$
- Se $l \cap L \neq \emptyset$ então $l \cap L$ consiste de um único ponto.
- Se $p \in l \cap L$ então $p = [a : b : 0 : 0]$ e $p \in \mathcal{S}_\phi = \mathcal{Z}(\phi(x, y) - \phi(z, t))$. Logo,

$$\phi(a, b) = 0 \implies [a : b] \in \mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(\phi) = \{[a_i : b_i]\}_{i=1}^d \implies p = p_i \text{ para algum } i.$$

- De forma análoga, se $M = \mathcal{Z}(x, y)$ e $l \cap M \neq \emptyset$ então $l \cap M$ consiste de um único ponto.

A seguir, mostraremos que $|\mathcal{L}_\phi| = d^2$.

O que nos permitirá concluir que:

$$\mathcal{L}_\phi := \{l \subset \mathcal{S}_\phi \mid l \cap L \neq \emptyset\} = \{l_{i,j} \mid 1 \leq i, j \leq d\}.$$

Considere uma reta l contida na superfície \mathcal{S}_ϕ . Note que:

- $l \neq L = \mathcal{Z}(z, t)$
- Se $l \cap L \neq \emptyset$ então $l \cap L$ consiste de um único ponto.
- Se $p \in l \cap L$ então $p = [a : b : 0 : 0]$ e $p \in \mathcal{S}_\phi = \mathcal{Z}(\phi(x, y) - \phi(z, t))$. Logo,

$$\phi(a, b) = 0 \implies [a : b] \in \mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(\phi) = \{[a_i : b_i]\}_{i=1}^d \implies p = p_i \text{ para algum } i.$$

- De forma análoga, se $M = \mathcal{Z}(x, y)$ e $l \cap M \neq \emptyset$ então $l \cap M$ consiste de um único ponto. De fato,

$$l \cap M = \{q_j\} \quad \text{para algum } j \in \{1, \dots, d\}$$

com $q_j = [0 : 0 : a_j : b_j]$ e $[a_j : b_j] \in \mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(\phi)$.

Assim, para concluir que

Assim, para concluir que

$$\mathcal{L}_\phi := \{l \subset \mathcal{S}_\phi \mid l \cap L \neq \emptyset\} = \{l_{i,j} \mid 1 \leq i, j \leq d\}.$$

Basta mostrarmos que

$$l \cap L \neq \emptyset \implies l \cap M \neq \emptyset.$$

Assim, para concluir que

$$\mathcal{L}_\phi := \{l \subset \mathcal{S}_\phi \mid l \cap L \neq \emptyset\} = \{l_{i,j} \mid 1 \leq i, j \leq d\}.$$

Basta mostrarmos que

$$l \cap L \neq \emptyset \implies l \cap M \neq \emptyset.$$

Proposição 2: Considere as retas $L = \mathcal{Z}(z, t)$ e $M = \mathcal{Z}(x, y)$ em \mathbb{P}^3 . Se l é uma reta contida na superfície \mathcal{S}_ϕ e $d \geq 2$. Então

$$l \cap L \neq \emptyset \iff l \cap M \neq \emptyset.$$

Assim, para concluir que

$$\mathcal{L}_\phi := \{l \subset \mathcal{S}_\phi \mid l \cap L \neq \emptyset\} = \{l_{i,j} \mid 1 \leq i, j \leq d\}.$$

Basta mostrarmos que

$$l \cap L \neq \emptyset \implies l \cap M \neq \emptyset.$$

Proposição 2: Considere as retas $L = \mathcal{Z}(z, t)$ e $M = \mathcal{Z}(x, y)$ em \mathbb{P}^3 . Se l é uma reta contida na superfície \mathcal{S}_ϕ e $d \geq 2$. Então

$$l \cap L \neq \emptyset \iff l \cap M \neq \emptyset.$$

Demonstração:

Assim, para concluir que

$$\mathcal{L}_\phi := \{l \subset \mathcal{S}_\phi \mid l \cap L \neq \emptyset\} = \{l_{i,j} \mid 1 \leq i, j \leq d\}.$$

Basta mostrarmos que

$$l \cap L \neq \emptyset \implies l \cap M \neq \emptyset.$$

Proposição 2: Considere as retas $L = \mathcal{Z}(z, t)$ e $M = \mathcal{Z}(x, y)$ em \mathbb{P}^3 . Se l é uma reta contida na superfície \mathcal{S}_ϕ e $d \geq 2$. Então

$$l \cap L \neq \emptyset \iff l \cap M \neq \emptyset.$$

Demonstração: Assuma que $l \cap L \neq \emptyset$. Assim, nosso objetivo é mostrar que $l \cap M \neq \emptyset$.

Assim, para concluir que

$$\mathcal{L}_\phi := \{l \subset \mathcal{S}_\phi \mid l \cap L \neq \emptyset\} = \{l_{i,j} \mid 1 \leq i, j \leq d\}.$$

Basta mostrarmos que

$$l \cap L \neq \emptyset \implies l \cap M \neq \emptyset.$$

Proposição 2: Considere as retas $L = \mathcal{Z}(z, t)$ e $M = \mathcal{Z}(x, y)$ em \mathbb{P}^3 . Se l é uma reta contida na superfície \mathcal{S}_ϕ e $d \geq 2$. Então

$$l \cap L \neq \emptyset \iff l \cap M \neq \emptyset.$$

Demonstração: Assuma que $l \cap L \neq \emptyset$. Assim, nosso objetivo é mostrar que $l \cap M \neq \emptyset$.

Como $l \cap L \neq \emptyset$, tem-se que

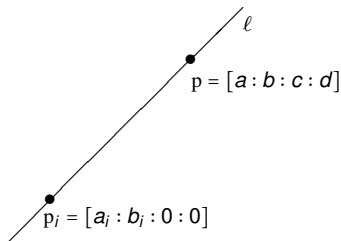
$$l \cap L = \{p_i\} \quad \text{para algum } i \in \{1, \dots, d\}$$

com $p_i = [a_i : b_i : 0 : 0]$ e $\phi(a_i, b_i) = 0$.

Lembremos (mais uma vez) que toda reta é determinada por dois pontos distintos.

Lembremos (mais uma vez) que toda reta é determinada por dois pontos distintos.

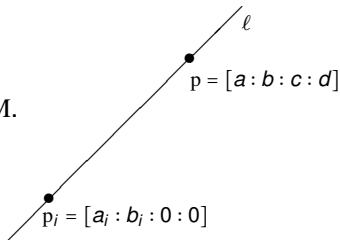
Assim, a reta ℓ será determinada por $p_i = [a_i : b_i : 0 : 0]$ e $p = [a : b : c : d]$ (p fixado em ℓ e distinto de p_i).



Lembremos (mais uma vez) que toda reta é determinada por dois pontos distintos.

Assim, a reta ℓ será determinada por $p_i = [a_i : b_i : 0 : 0]$ e $p = [a : b : c : d]$ (p fixado em ℓ e distinto de p_i).

Note que, se $a = b = 0$ então $p \in \ell \cap M$.



Desafio/Exercício

Se $p = [p_0 : p_1 : p_2 : p_3]$ e $q = [q_0 : q_1 : q_2 : q_3]$ são pontos distintos em \mathbb{P}^3 então todo ponto da reta que passa pelos pontos p e q se escreve da forma

$$[\alpha \cdot p_0 + \beta \cdot q_0 : \alpha \cdot p_1 + \beta \cdot q_1 : \alpha \cdot p_2 + \beta \cdot q_2 : \alpha \cdot p_3 + \beta \cdot q_3]$$

com α e β números complexos não ambos nulos.

Desafio/Exercício

Se $p = [p_0 : p_1 : p_2 : p_3]$ e $q = [q_0 : q_1 : q_2 : q_3]$ são pontos distintos em \mathbb{P}^3 então todo ponto da reta que passa pelos pontos p e q se escreve da forma

$$[\alpha \cdot p_0 + \beta \cdot q_0 : \alpha \cdot p_1 + \beta \cdot q_1 : \alpha \cdot p_2 + \beta \cdot q_2 : \alpha \cdot p_3 + \beta \cdot q_3]$$

com α e β números complexos não ambos nulos.

Portanto, sendo a reta ℓ determinada pelos pontos

$$p_i = [a_i : b_i : 0 : 0] \quad \text{e} \quad p = [a : b : c : d],$$

segue que todo ponto na reta ℓ se escreve da forma

$$[\alpha \cdot a_i + \beta \cdot a : \alpha \cdot b_i + \beta \cdot b : \beta \cdot c : \beta \cdot d]$$

com α e $\beta \in \mathbb{C}$ não ambos nulos.

Afirmção: $l \cap M \neq \emptyset \iff a \cdot b_j - b \cdot a_i = 0.$

Afirmção: $\ell \cap M \neq \emptyset \iff a \cdot b_j - b \cdot a_j = 0$.

\implies Lembremos que os pontos da reta ℓ são da forma

$$[\alpha \cdot a_j + \beta \cdot a : \alpha \cdot b_j + \beta \cdot b : \beta \cdot c : \beta \cdot d] \quad (\heartsuit)$$

com α e $\beta \in \mathbb{C}$ não ambos nulos.

Afirmação: $\ell \cap M \neq \emptyset \iff a \cdot b_i - b \cdot a_i = 0$.

\implies Lembremos que os pontos da reta ℓ são da forma

$$[\alpha \cdot a_i + \beta \cdot a : \alpha \cdot b_i + \beta \cdot b : \beta \cdot c : \beta \cdot d] \quad (\heartsuit)$$

com α e $\beta \in \mathbb{C}$ não ambos nulos.

Se $\ell \cap M \neq \emptyset$ então existem α e $\beta \in \mathbb{C}$ não ambos nulos tais que

$$\begin{cases} \alpha \cdot a_i + \beta \cdot a = 0 \\ \alpha \cdot b_i + \beta \cdot b = 0 \end{cases}$$

Afirmação: $\ell \cap M \neq \emptyset \iff a \cdot b_i - b \cdot a_i = 0.$

\implies Lembremos que os pontos da reta ℓ são da forma

$$[\alpha \cdot a_i + \beta \cdot a : \alpha \cdot b_i + \beta \cdot b : \beta \cdot c : \beta \cdot d] \quad (\heartsuit)$$

com α e $\beta \in \mathbb{C}$ não ambos nulos.

Se $\ell \cap M \neq \emptyset$ então existem α e $\beta \in \mathbb{C}$ não ambos nulos tais que

$$\begin{cases} \alpha \cdot a_i + \beta \cdot a = 0 \\ \alpha \cdot b_i + \beta \cdot b = 0 \end{cases} \implies \alpha(a \cdot b_i - b \cdot a_i) = 0 \quad e \quad \beta(a \cdot b_i - b \cdot a_i) = 0.$$

De onde concluímos que

Afirmação: $\ell \cap M \neq \emptyset \iff a \cdot b_i - b \cdot a_i = 0.$

\implies Lembremos que os pontos da reta ℓ são da forma

$$[\alpha \cdot a_i + \beta \cdot a : \alpha \cdot b_i + \beta \cdot b : \beta \cdot c : \beta \cdot d] \quad (\heartsuit)$$

com α e $\beta \in \mathbb{C}$ não ambos nulos.

Se $\ell \cap M \neq \emptyset$ então existem α e $\beta \in \mathbb{C}$ não ambos nulos tais que

$$\begin{cases} \alpha \cdot a_i + \beta \cdot a = 0 \\ \alpha \cdot b_i + \beta \cdot b = 0 \end{cases} \implies \alpha(a \cdot b_i - b \cdot a_i) = 0 \quad e \quad \beta(a \cdot b_i - b \cdot a_i) = 0.$$

De onde concluímos que $a \cdot b_i - b \cdot a_i = 0.$

Afirmação: $\ell \cap M \neq \emptyset \iff a \cdot b_j - b \cdot a_j = 0$.

\implies Lembremos que os pontos da reta ℓ são da forma

$$[\alpha \cdot a_j + \beta \cdot a : \alpha \cdot b_j + \beta \cdot b : \beta \cdot c : \beta \cdot d] \quad (\heartsuit)$$

com α e $\beta \in \mathbb{C}$ não ambos nulos.

Se $\ell \cap M \neq \emptyset$ então existem α e $\beta \in \mathbb{C}$ não ambos nulos tais que

$$\begin{cases} \alpha \cdot a_j + \beta \cdot a = 0 \\ \alpha \cdot b_j + \beta \cdot b = 0 \end{cases} \implies \alpha(a \cdot b_j - b \cdot a_j) = 0 \quad e \quad \beta(a \cdot b_j - b \cdot a_j) = 0.$$

De onde concluímos que $a \cdot b_j - b \cdot a_j = 0$.

\longleftarrow Sabemos que $a \cdot b_j - b \cdot a_j = 0$ implica em $(a, b) = (\lambda \cdot a_j, \lambda \cdot b_j)$

Afirmação: $\ell \cap M \neq \emptyset \iff a \cdot b_j - b \cdot a_j = 0$.

\implies Lembremos que os pontos da reta ℓ são da forma

$$[\alpha \cdot a_j + \beta \cdot a : \alpha \cdot b_j + \beta \cdot b : \beta \cdot c : \beta \cdot d] \quad (\heartsuit)$$

com α e $\beta \in \mathbb{C}$ não ambos nulos.

Se $\ell \cap M \neq \emptyset$ então existem α e $\beta \in \mathbb{C}$ não ambos nulos tais que

$$\begin{cases} \alpha \cdot a_j + \beta \cdot a = 0 \\ \alpha \cdot b_j + \beta \cdot b = 0 \end{cases} \implies \alpha(a \cdot b_j - b \cdot a_j) = 0 \quad e \quad \beta(a \cdot b_j - b \cdot a_j) = 0.$$

De onde concluímos que $a \cdot b_j - b \cdot a_j = 0$.

\longleftarrow Sabemos que $a \cdot b_j - b \cdot a_j = 0$ implica em $(a, b) = (\lambda \cdot a_j, \lambda \cdot b_j)$

Assim, ao substituírmos $\beta = 1$ e $\alpha = -\lambda$ em (\heartsuit) concluímos que o ponto $[0 : 0 : c : d] \in \ell \cap M$.

A seguir, vamos supor, por absurdo, que $\ell \cap M = \emptyset$.

A seguir, vamos supor, por absurdo, que $\ell \cap M = \emptyset$. Assim, $a \cdot b_i - b \cdot a_i \neq 0$.

A seguir, vamos supor, por absurdo, que $\ell \cap M = \emptyset$. Assim, $a \cdot b_i - b \cdot a_i \neq 0$.

O que nos permite definir o isomorfismo linear

$$T : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$$

dado por: $(\alpha, \beta) \longmapsto (a_i \cdot \alpha + a \cdot \beta, b_i \cdot \alpha + b \cdot \beta) \equiv \begin{bmatrix} a_i & a \\ b_i & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$.

A seguir, vamos supor, por absurdo, que $\ell \cap M = \emptyset$. Assim, $a \cdot b_i - b \cdot a_i \neq 0$.

O que nos permite definir o isomorfismo linear

$$T: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$$

dado por: $(\alpha, \beta) \mapsto (a_i \cdot \alpha + a \cdot \beta, b_i \cdot \alpha + b \cdot \beta) \equiv \begin{bmatrix} a_i & a \\ b_i & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$.

Exercício

$$T^{-1}(r, s) = (a_i \cdot b - a \cdot b_i) \cdot (b \cdot r - a \cdot s, a_i \cdot s - b_i \cdot r).$$

Ou seja,

$$T^{-1}(r, s) \equiv (a_i \cdot b - a \cdot b_i) \begin{bmatrix} b & -a \\ -b_i & a_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix}.$$

A seguir, vamos supor, por absurdo, que $\ell \cap M = \emptyset$. Assim, $a \cdot b_i - b \cdot a_i \neq 0$.

O que nos permite definir o isomorfismo linear

$$T: \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$$

dado por: $(\alpha, \beta) \mapsto (a_i \cdot \alpha + a \cdot \beta, b_i \cdot \alpha + b \cdot \beta) \equiv \begin{bmatrix} a_i & a \\ b_i & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$.

Exercício

$$T^{-1}(r, s) = (a_i \cdot b - a \cdot b_i) \cdot (b \cdot r - a \cdot s, a_i \cdot s - b_i \cdot r).$$

Ou seja,

$$T^{-1}(r, s) \equiv (a_i \cdot b - a \cdot b_i) \begin{bmatrix} b & -a \\ -b_i & a_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$T(\alpha, \beta) = (r, s) \iff \alpha = (a_i \cdot b - a \cdot b_i) \cdot (b \cdot r - a \cdot s) \text{ e } \beta = (a_i \cdot b - a \cdot b_i) \cdot (a_i \cdot s - b_i \cdot r).$$

Observemos que

$\ell \subset \mathcal{S}_\phi = \mathcal{Z}(F)$ com $F = \phi(x, y) - \phi(z, t)$ implica em

Observemos que

$\ell \subset \mathcal{S}_\phi = \mathcal{Z}(F)$ com $F = \phi(x, y) - \phi(z, t)$ implica em

$$F(\alpha \cdot \mathbf{a}_i + \beta \cdot \mathbf{a}, \alpha \cdot \mathbf{b}_i + \beta \cdot \mathbf{b}, \beta \cdot \mathbf{c}, \beta \cdot \mathbf{d}) = 0 \quad \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2.$$

Observemos que

$\ell \subset \mathcal{S}_\phi = \mathcal{Z}(F)$ com $F = \phi(x, y) - \phi(z, t)$ implica em

$$F(\alpha \cdot \mathbf{a}_i + \beta \cdot \mathbf{a}, \alpha \cdot \mathbf{b}_i + \beta \cdot \mathbf{b}, \beta \cdot \mathbf{c}, \beta \cdot \mathbf{d}) = 0 \quad \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2.$$

Ou seja,

$$\phi(\alpha \cdot \mathbf{a}_i + \beta \cdot \mathbf{a}, \alpha \cdot \mathbf{b}_i + \beta \cdot \mathbf{b}) - \phi(\beta \cdot \mathbf{c}, \beta \cdot \mathbf{d}) = 0 \quad \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2.$$

Observemos que

$\ell \subset \mathcal{S}_\phi = \mathcal{Z}(F)$ com $F = \phi(x, y) - \phi(z, t)$ implica em

$$F(\alpha \cdot \mathbf{a}_i + \beta \cdot \mathbf{a}, \alpha \cdot \mathbf{b}_i + \beta \cdot \mathbf{b}, \beta \cdot \mathbf{c}, \beta \cdot \mathbf{d}) = 0 \quad \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2.$$

Ou seja,

$$\phi(\alpha \cdot \mathbf{a}_i + \beta \cdot \mathbf{a}, \alpha \cdot \mathbf{b}_i + \beta \cdot \mathbf{b}) - \phi(\beta \cdot \mathbf{c}, \beta \cdot \mathbf{d}) = 0 \quad \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2.$$

Assim,

$$\phi(T(\alpha, \beta)) - \beta^d \phi(\mathbf{c}, \mathbf{d}) = 0 \quad \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2.$$

visto que $\phi(u, v) = (a_1 v - b_1 u) \cdot (a_2 v - b_2 u) \cdots (a_d v - b_d u)$.

Observemos que

$\ell \subset \mathcal{S}_\phi = \mathcal{Z}(F)$ com $F = \phi(x, y) - \phi(z, t)$ implica em

$$F(\alpha \cdot \mathbf{a}_i + \beta \cdot \mathbf{a}, \alpha \cdot \mathbf{b}_i + \beta \cdot \mathbf{b}, \beta \cdot \mathbf{c}, \beta \cdot \mathbf{d}) = 0 \quad \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2.$$

Ou seja,

$$\phi(\alpha \cdot \mathbf{a}_i + \beta \cdot \mathbf{a}, \alpha \cdot \mathbf{b}_i + \beta \cdot \mathbf{b}) - \phi(\beta \cdot \mathbf{c}, \beta \cdot \mathbf{d}) = 0 \quad \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2.$$

Assim,

$$\phi(T(\alpha, \beta)) - \beta^d \phi(\mathbf{c}, \mathbf{d}) = 0 \quad \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2.$$

visto que $\phi(u, v) = (a_1 v - b_1 u) \cdot (a_2 v - b_2 u) \cdots (a_d v - b_d u)$.

Ao fazermos, $T(\alpha, \beta) = (r, s)$ segue que

$$\phi(r, s) - \beta^d \phi(\mathbf{c}, \mathbf{d}) = 0 \quad \forall (r, s) \in \mathbb{C}^2.$$

com $\beta = (a_i \cdot b - a \cdot b_i) \cdot (s \cdot a_i - r \cdot b_i)$.

De onde concluímos que

$$\phi(u, v) = \phi(c, d) \cdot (a_i \cdot b - a \cdot b_i)^d \cdot (v \cdot a_i - u \cdot b_i)^d \in \mathbb{C}[u, v].$$

De onde concluímos que

$$\phi(u, v) = \phi(c, d) \cdot (a_i \cdot b - a \cdot b_i)^d \cdot (v \cdot a_i - u \cdot b_i)^d \in \mathbb{C}[u, v].$$

Vamos focar nossa atenção no valor de $\phi(c, d)$

De onde concluímos que

$$\phi(u, v) = \phi(c, d) \cdot (a_i \cdot b - a \cdot b_i)^d \cdot (v \cdot a_i - u \cdot b_i)^d \in \mathbb{C}[u, v].$$

Vamos focar nossa atenção no valor de $\phi(c, d)$

- Se $\phi(c, d) = 0$ então $\phi(u, v) = 0$ é o polinômio nulo!

De onde concluímos que

$$\phi(u, v) = \phi(c, d) \cdot (a_i \cdot b - a \cdot b_i)^d \cdot (v \cdot a_i - u \cdot b_i)^d \in \mathbb{C}[u, v].$$

Vamos focar nossa atenção no valor de $\phi(c, d)$

- Se $\phi(c, d) = 0$ então $\phi(u, v) = 0$ é o polinômio nulo! **Absurdo!**

De onde concluímos que

$$\phi(u, v) = \phi(c, d) \cdot (a_i \cdot b - a \cdot b_i)^d \cdot (v \cdot a_i - u \cdot b_i)^d \in \mathbb{C}[u, v].$$

Vamos focar nossa atenção no valor de $\phi(c, d)$

- Se $\phi(c, d) = 0$ então $\phi(u, v) = 0$ é o polinômio nulo! **Absurdo!**
- Se $\phi(c, d) \neq 0$ então

$$\phi(u, v) = \underbrace{\phi(c, d) \cdot (a_i \cdot b - a \cdot b_i)^d}_{\text{constante não nula}} \cdot \underbrace{(v \cdot a_i - u \cdot b_i)^d}_{d \text{ fatores repetidos}}$$

De onde concluímos que

$$\phi(u, v) = \phi(c, d) \cdot (a_i \cdot b - a \cdot b_i)^d \cdot (v \cdot a_i - u \cdot b_i)^d \in \mathbb{C}[u, v].$$

Vamos focar nossa atenção no valor de $\phi(c, d)$

- Se $\phi(c, d) = 0$ então $\phi(u, v) = 0$ é o polinômio nulo! **Absurdo!**
- Se $\phi(c, d) \neq 0$ então

$$\phi(u, v) = \underbrace{\phi(c, d) \cdot (a_i \cdot b - a \cdot b_i)^d}_{\text{constante não nula}} \cdot \underbrace{(v \cdot a_i - u \cdot b_i)^d}_{d \text{ fatores repetidos}}$$

Como cada fator determina um zero de ϕ em \mathbb{P}^1 segue que $\mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(\phi) = \{[a_i : b_i]\}$ consiste de um único ponto!

De onde concluímos que

$$\phi(u, v) = \phi(c, d) \cdot (a_i \cdot b - a \cdot b_i)^d \cdot (v \cdot a_i - u \cdot b_i)^d \in \mathbb{C}[u, v].$$

Vamos focar nossa atenção no valor de $\phi(c, d)$

- Se $\phi(c, d) = 0$ então $\phi(u, v) = 0$ é o polinômio nulo! **Absurdo!**
- Se $\phi(c, d) \neq 0$ então

$$\phi(u, v) = \underbrace{\phi(c, d) \cdot (a_i \cdot b - a \cdot b_i)^d}_{\text{constante não nula}} \cdot \underbrace{(v \cdot a_i - u \cdot b_i)^d}_{d \text{ fatores repetidos}}$$

Como cada fator determina um zero de ϕ em \mathbb{P}^1 segue que $\mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(\phi) = \{[a_i : b_i]\}$ consiste de um único ponto! **Absurdo!** (pois estamos considerando d pontos distintos e $d \geq 2$).

De onde concluímos que

$$\phi(u, v) = \phi(c, d) \cdot (a_i \cdot b - a \cdot b_i)^d \cdot (v \cdot a_i - u \cdot b_i)^d \in \mathbb{C}[u, v].$$

Vamos focar nossa atenção no valor de $\phi(c, d)$

- Se $\phi(c, d) = 0$ então $\phi(u, v) = 0$ é o polinômio nulo! **Absurdo!**
- Se $\phi(c, d) \neq 0$ então

$$\phi(u, v) = \underbrace{\phi(c, d) \cdot (a_i \cdot b - a \cdot b_i)^d}_{\text{constante não nula}} \cdot \underbrace{(v \cdot a_i - u \cdot b_i)^d}_{d \text{ fatores repetidos}}$$

Como cada fator determina um zero de ϕ em \mathbb{P}^1 segue que $\mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(\phi) = \{[a_i : b_i]\}$ consiste de um único ponto! **Absurdo!**
(pois estamos considerando d pontos distintos e $d \geq 2$).

Portanto, $\ell \cap M \neq \emptyset$.



Recapitulando. Mostramos que

Recapitulando. Mostramos que

Se $l \in \mathcal{L}_\phi = \{l \subset \mathcal{S}_\phi \mid l \cap L \neq \emptyset\}$ então $l \cap L = \{p_i\}$ para algum i .

Recapitulando. Mostramos que

Se $l \in \mathcal{L}_\phi = \{l \subset \mathcal{S}_\phi \mid l \cap L \neq \emptyset\}$ então $l \cap L = \{p_i\}$ para algum i .

Entretanto, a Proposição 2 nos garante que

$$l \cap L \neq \emptyset \iff l \cap M \neq \emptyset$$

Recapitulando. Mostramos que

Se $l \in \mathcal{L}_\phi = \{l \subset \mathcal{S}_\phi \mid l \cap L \neq \emptyset\}$ então $l \cap L = \{p_i\}$ para algum i .

Entretanto, a Proposição 2 nos garante que

$$l \cap L \neq \emptyset \iff l \cap M \neq \emptyset$$

Assim, $l \cap M \neq \emptyset$.

Recapitulando. Mostramos que

Se $l \in \mathcal{L}_\phi = \{l \subset \mathcal{S}_\phi \mid l \cap L \neq \emptyset\}$ então $l \cap L = \{p_i\}$ para algum i .

Entretanto, a Proposição 2 nos garante que

$$l \cap L \neq \emptyset \iff l \cap M \neq \emptyset$$

Assim, $l \cap M \neq \emptyset$. Logo,

$$l \cap M = \{q_j\} \quad \text{para algum } j \implies l = l_{i,j}.$$

Recapitulando. Mostramos que

Se $l \in \mathcal{L}_\phi = \{l \subset \mathcal{S}_\phi \mid l \cap L \neq \emptyset\}$ então $l \cap L = \{p_i\}$ para algum i .

Entretanto, a Proposição 2 nos garante que

$$l \cap L \neq \emptyset \iff l \cap M \neq \emptyset$$

Assim, $l \cap M \neq \emptyset$. Logo,

$$l \cap M = \{q_j\} \quad \text{para algum } j \implies l = l_{i,j}.$$

Portanto,

$$\mathcal{L}_\phi = \{l \subset \mathcal{S}_\phi \mid l \cap L \neq \emptyset\} = \{l_{i,j} \mid 1 \leq i, j \leq d\}.$$

Recapitulando. Mostramos que

Se $l \in \mathcal{L}_\phi = \{l \subset \mathcal{S}_\phi \mid l \cap L \neq \emptyset\}$ então $l \cap L = \{p_i\}$ para algum i .

Entretanto, a Proposição 2 nos garante que

$$l \cap L \neq \emptyset \iff l \cap M \neq \emptyset$$

Assim, $l \cap M \neq \emptyset$. Logo,

$$l \cap M = \{q_j\} \quad \text{para algum } j \implies l = l_{i,j}.$$

Portanto,

$$\mathcal{L}_\phi = \{l \subset \mathcal{S}_\phi \mid l \cap L \neq \emptyset\} = \{l_{i,j} \mid 1 \leq i, j \leq d\}.$$

De onde, concluímos que $|\mathcal{L}_\phi| = d^2$.

Tendo em consideração que

$$n_\phi = \left| \left\{ \text{retas contidas em } \mathcal{S}_\phi \right\} \right| = |\mathcal{L}_\phi| + |\mathcal{L}'_\phi|.$$

Tendo em consideração que

$$n_\phi = \left| \left\{ \text{retas contidas em } \mathcal{S}_\phi \right\} \right| = |\mathcal{L}_\phi| + |\mathcal{L}'_\phi|.$$

Concluimos que

$$n_\phi = d^2 + |\mathcal{L}'_\phi|.$$

Tendo em consideração que

$$n_\phi = \left| \left\{ \text{retas contidas em } \mathcal{S}_\phi \right\} \right| = |\mathcal{L}_\phi| + |\mathcal{L}'_\phi|.$$

Concluimos que

$$n_\phi = d^2 + |\mathcal{L}'_\phi|.$$

PRÓXIMA AULA

Vamos abordar o cálculo de $|\mathcal{L}'_\phi|$.
