Introducción a los Espacios de Sobolev- Aula 5

Luz de Teresa

Janeiro 2021

Escola de verão 2021, UFPB

UFPB

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Teorema (Teorema de Friedrichs)

Sea $u \in W^{k,p}(\Omega)$ *con* $k \geq 1$ *y* $p \in [1, \infty)$. *Entonces, existe una sucesión* $\{\varphi_n\} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ *tal que*

$$\varphi_n|_\Omega \to u \text{ en } L^p(\Omega) \text{ y } D^\alpha \varphi_n|_{\Omega'} \to D^\alpha u|_{\Omega'}, \forall \alpha : 0 < |\alpha| \leq k \text{ y } \forall \Omega' \subset\subset \Omega.$$

Definición

Sea $1 \leq p < N$, el exponente crítico de Sobolev p^* se define como

$$p^* = \frac{Np}{N-p} \quad \text{donde} \quad \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}.$$

Teorema (Sobolev-Gagliardo-Nirenberg)

Suponga que $1 \leq p < N$, entonces se tiene la siguiente inclusión

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^q(\mathbb{R}^N),$$

donde $q \in [p, p^*]$. Más aún, existe una constante C dependiente de p y N tal que

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \quad \forall u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N). \tag{1}$$

Corolario

Sea $1 \leq p < N$*. Entonces*

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^q(\mathbb{R}^N) \quad \forall q \in [p, p^*].$$

Corolario (Caso límite $p = N$)

$$W^{1,N}(\mathbb{R}^N) \subset L^q(\mathbb{R}^N) \quad \forall q \in [N, \infty).$$

Teorema (Morrey)

Sea $p > N$, entonces

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Resultados de regularidad

Funciones Hölder continuas

Sea $A \subset \mathbb{R}^N$. Una función $u : A \to \mathbb{R}$ es Hölder continua con exponente $0 < \alpha \leq 1$ si existe $C > 0$ tal que

$$|u(x) - u(y)| \leq C\,|x - y|^\alpha$$

para todo $x, y \in A$. Definimos el espacio $C^{0,\alpha}(A)$ al espacio de funciones Hölder continuas con norma

$$\|u\|_{C^\alpha(A)} = \sup_{x \in A} |u(x)| + \sup_{x,y \in A, x \neq y} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha}$$

Teorema (Morrey)

Supongamos que $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ *con* $p > N$*. Entonces, existe* $c = c(N,p) > 0$ *tal que*

$$|u(z) - u(y)| \leq c\,|z-y|^{1-\frac{N}{p}}\,\|\nabla u\|_{L^p}$$

Demostración

Sea $Q(x,l) = \{y \in \mathbb{R}^N : \left|y_j - x_j\right| \leq \frac{1}{2}\}$, Definimos $f_{Q(x,l)} = \frac{1}{|Q(x,l)|}\int_{Q(x,l)} f(y)dy$.

1) Supongamos que $u \in C^\infty(\mathbb{R}^N) \cap W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Sean $z, y \in Q(x,l)$

$$u(z)-u(y) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}(u(tz+(1-t)y)dt = \int_0^1 \nabla u(tz+(1-t)y)\cdot(z-y)dt.$$

Además

$$|u_Q - u(y)| = \left|\fint_{Q(x,l)}(u(z)-u(y))dz\right|$$

Por lo que

$$
\begin{aligned}
|u_Q - u(y)| &= \left| \fint_{Q(x,l)} \int_0^1 \nabla u(tz + (1-t)y) \cdot (z-y) dtdz \right| \\
&\leq \sum_{j=1}^{l} \frac{1}{l^N} \int_{Q(x,l)} \int_0^1 \left| \frac{\partial u}{\partial x_j}(tz + (1-t)y) \right| \left| z_j - y_j \right| dtdz \\
&\leq \sum_{j=1}^{l} \frac{1}{l^{N-1}} \int_0^1 \int_{Q(x,l)} \left| \frac{\partial u}{\partial x_j}(tz + (1-t)y) \right| dzdt \\
&\leq \sum_{j=1}^{l} \frac{1}{l^{N-1}} \int_0^1 \frac{1}{t^N} \int_{Q(tx+(1-t)y,tl)} \left| \frac{\partial u}{\partial x_j}(w) \right| dwdt
\end{aligned}
$$

$$\sum_{j=1}^{l} \frac{1}{l^{N-1}} \int_0^1 \frac{1}{t^N} \int_{Q(tx+(1-t)y,tl)} \left| \frac{\partial u}{\partial x_j}(w) \right| dwdt$$

$$\leq \sum_{j=1}^{l} \frac{1}{l^{N-1}} \int_0^1 \frac{1}{t^N} \left(\int_{Q(tx+(1-t)y,tl)} \left| \frac{\partial u}{\partial x_j}(w) \right|^p dw \right)^{1/p} \cdot$$

$$|Q(tx + (1-t)y, tl)|^{1/p'} dt$$

$$\leq N \|\nabla u\| \frac{l^{N(1-1/p)}}{l^{N-1}} \int_0^1 \frac{t^{N(1-1/p)}}{t^N} dt$$

$$= \frac{Np}{p-N} l^{1-N/p} \|\nabla u\|_{L^p(Q(x,l))}$$

Hemos obtenido

$$
\begin{aligned}
|u(z)-u(y)| &\leq \left|u(z)-u_{Q(x,l)}\right| + \left|u(y)-u_{Q(x,l)}\right| \\
&\leq 2\frac{Np}{p-N} l^{1-N/p} \|\nabla u\|_{L^p(Q(x,l))}
\end{aligned}
$$

para todo $z, y \in Q(x,l)$

Para todo $z, y \in \mathbb{R}^N$ existe un cubo $y, z \in Q(x, l)$ tal que $l = |z - y|$ (por ejemplo $x = \frac{z+y}{2}$). Por tanto

$$|u(z) - u(y)| \leq c\,|z - y|^{1-N/p}\,\|\nabla u\|_{L^p(Q)} \leq c\,|z - y|^{1-N/p}\,\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}$$

Teorema

Sean $u, v \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ *con* $1 \leq p \leq \infty$. *Entonces* $uv \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ *y*

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(uv) = \frac{\partial u}{\partial x_i} v + u \frac{\partial v}{\partial x_i}. \quad i = 1, \cdots, N$$

Demostración Nos limitamos al caso $1 \leq p < \infty$ Sabemos que existen sucesiones $(u_n), (v_n) \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ tales que

$$u_n \to u, \quad v_n \to v \quad \text{en } L^p(\Omega) \text{ y ctp en } \Omega,$$

$$\nabla u_n \to u, \quad \nabla v_n \to \nabla v \quad \text{en } L^p(\omega)^N \text{ para todo } \omega \subset\subset \Omega,$$

Por la construcción en la prueba del Teorema de Friedrichs se ve que

$$\|u_n\|_{L^\infty} \leq \|u\|_{L^\infty} \quad \text{y } \|v_n\|_{L^\infty} \leq \|v\|_{L^\infty}.$$

Por otra parte

$$\int_\Omega u_n v_n \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_i} v_n + u_n \frac{\partial v_n}{\partial x_i} \right) \varphi \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Pasando al límite se tiene el resultado deseado.

Teorema

Supongamos Ω acotado de clase C^1. Se verifica

$$si\ p < N,\ \ entonces\ W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega), \forall q \in [1, p^*),$$

$$si\ p = N,\ \ entonces\ W^{1,N}(\Omega) \subset L^q(\Omega), \forall q \in [1, \infty),$$

$$si\ p > N,\ \ entonces\ W^{1,p}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega}),$$

con inyecciones compactas.

Contraejemplo

La relación entre la dimensión y p es importante:

Sea $N \geq 2$. Sea $\Omega = B_{1/2}(0)$ consideremos la función

$$u(x) = \ln(|\ln((|x|)|).$$

Sus primeras derivadas son

$$D^{\alpha}u(x) = \frac{x^{\alpha}}{|x|^2 \ln(|x|)}, |\alpha| = 1,$$

Observemos que

$$|D^{\alpha}u(x)| \leq \frac{1}{|x||\ln(|x|)|}, \quad |\alpha| = 1$$

que pertenece a $L^2(\Omega)$. Por otro lado $u \notin L^{\infty}(\Omega)$

Contraejemplo

Para extender funciones de Ω a $\mathbb{R}^N$ pedimos regularidad del dominio. Sin embargo, se puede ver que esto no es posible en dominios menos regulares.

Sea $N = 2, \Omega = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | 0 < x_1 < 1, |x_2| < x_1^r\}, r > 1,$

Consideramos la función

$$u(x) = x_1^{\frac{-\varepsilon}{p}}, 0 < \varepsilon < r.$$

Para $\varepsilon < r + 1 - p$ tenemos que $u \in W^{1,p}(\Omega)$ ya que

$$\sum_{|\alpha|=1} \int_\Omega |D^\alpha u|^p \, dx = C_{\varepsilon,p} \int_0^1 x_1^{-\varepsilon-p+r} dx_1.$$

ESPACIOS DE SOBOLEV FRACCIONARIOS

Definición (Espacio de Schwartz)

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^N) := \left\{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^N) : \|\varphi\|_\ell < \infty \text{ para todo } \ell \in \mathbb{N}_0\right\},$$

donde

$$\|\varphi\|_\ell = \sup_{x\in\mathbb{R}^N} \left(1 + |x|^2\right)^{\frac{\ell}{2}} \sum_{|\alpha|\leq\ell} |D^\alpha\varphi(x)|\,. \tag{2}$$

es llamado el espacio de funciones de Schwartz o de funciones de decaimiento rápido.

A diferencia de $\mathcal{D}(\Omega)$, $\mathcal{S}(\Omega)$ es un espacio metrizable, esto es, que aunque la topología no sea inducida directamente por la norma se pueden encontrar funciones que resultan ser métricas.

Definición (Transformada de Fourier en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$)

Sea $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, entonces

$$\hat{\varphi}(\xi) = (\mathcal{F}\varphi)(\xi) = (2\pi)^{-N/2} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-ix\cdot\xi} \varphi(x)dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^N, \tag{3}$$

es llamada la transformada de Fourier de φ, y

$$\check{\varphi}(\xi) = (\mathcal{F}^{-1}\varphi)(\xi) = (2\pi)^{-N/2} \int_{\mathbb{R}^N} e^{ix\cdot\xi} \varphi(x)dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^N, \tag{4}$$

es llamada la transformada de Fourier inversa de φ.

Distribuciones temperadas

Denotamos por $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ al espacio dual de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, a sus elementos se les llama *distribuciones temperadas*. Más aún, $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ si y sólo si existen números: $c > 0$, $\ell \in \mathbb{N}_0$ tal que $|T\varphi| \leq c \,\|\varphi\|_\ell$

La idea es caracterizar a los espacios H^k mediante la transformada de Fourier.

Teorema

Para $k \geq 1$ entero, se tienen las siguientes inclusiones

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \subset H^k(\mathbb{R}^N) \subset L^2(\mathbb{R}^N) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N). \tag{5}$$

Más aún, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ es denso en $H^k(\mathbb{R}^N)$.

Introducimos los espacios L^2 con peso.

Definición

Sea w una función positiva y continua en $\mathbb{R}^N$, entonces

$$L^2(\mathbb{R}^N, w) := \left\{ u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N) : wu \in L^2(\mathbb{R}^N) \right\}.$$

En particular, los pesos de interés especial son

$$w_s(x) = \left(1 + |x|^2\right)^{s/2} \quad s \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^N. \tag{6}$$

Proposición

El espacio $L^2(\mathbb{R}^N, w_s)$ es un espacio de Hilbert con el producto escalar $\int_{\mathbb{R}^n} w_s u w_s v$. Más aún,

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \subset L^2(\mathbb{R}^N, w_s) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N) \tag{7}$$

y se tiene que tanto $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ como $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ son densos en $L^2(\mathbb{R}^N, w_s)$.

Definición (Espacios de Sobolev de orden fraccionario)

Sea $s \in \mathbb{R}$ *y* w_s *como en* (6). *Entonces*

$$H^s(\mathbb{R}^N) := \left\{ u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N) : \quad w_s \mathcal{F} u \in L^2(\mathbb{R}^N) \right\}.$$

Teorema

Sea $s > 0$, *entonces*

$$H^{-s}(\mathbb{R}^N) = \left\{ u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N) : (1 + |\xi|)^{-s/2} \mathcal{F} u \in L^2(\mathbb{R}^N) \right\},$$

donde $H^{-s}(\mathbb{R}^N)$ *es el dual de* $H^s(\mathbb{R}^N)$.

Sea Ω abierto, definimos

$$H^s(\Omega) = \Big\{ u \in L^2(\Omega) : \text{ existe } g \in H^s(\mathbb{R}^n) \text{ tal que } g|_\Omega = u \Big\}.$$

$\operatorname{tr} : W^{k,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$ y para $k \geq 2$, $\operatorname{tr}_\nu := \operatorname{tr} \dfrac{\partial}{\partial\nu} : W^{k,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$.

donde ν es el vector normal de $\partial\Omega$.

Teorema

Sea Ω un dominio acotado de clase C^∞.

(I) *Sea $s > \frac{1}{2}$, entonces la aplicación traza* $\mathrm{tr} : H^s(\Omega) \to H^{s-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ *es una aplicación lineal y continua. Además,*

$$\mathrm{tr}[H^s(\Omega)] = H^{s-\frac{1}{2}}(\partial\Omega). \tag{8}$$

(II) *Sea $s > \frac{3}{2}$, entonces la traza de $\frac{\partial}{\partial\nu}$ denotado por* $\mathrm{tr}_\nu : H^s(\Omega) \to H^{s-\frac{3}{2}}(\partial\Omega)$ *es una aplicación lineal y continua. Además,*

$$\mathrm{tr}_\nu[H^s(\Omega)] = H^{s-\frac{3}{2}}(\partial\Omega). \tag{9}$$

Ejemplo

En particular,

- Para $s = 1$

$$H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) = \mathrm{tr}[H^1(\Omega)]. \tag{10}$$

- Para $s = 2$

$$H^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega) = \mathrm{tr}[H^2(\Omega)]. \tag{11}$$

Ejemplo

Sea la distribución de Dirac δ_0, entonces

$$\delta_0 \in H^{-s}(\mathbb{R}), \quad \text{para } s > \frac{1}{2}.$$