Introducción a los Espacios de Sobolev- Aula 4

Luz de Teresa

Janeiro 2021

Escola de verão 2021, UFPB

UFPB

Departamento de Matemática

Teorema

Sea $a : H \times H \to \mathbb{R}$ *una forma bilineal, continua y coercitiva y sea* $f \in H'$. *Entonces, existe un único* $\hat{u} \in H$ *tal que*

$$a(\hat{u}, v) = f(v) \quad \forall v \in H, \quad \hat{u} \in H. \tag{1}$$

Si además a *es simétrica, i.e.* $a(u, v) = a(v, u)$, *entonces* $\hat{u}$ *está caracterizado por ser la única solución del problema de mínimos*

$$\frac{1}{2} a(\hat{u}, \hat{u}) - f(\hat{u}) = \inf_{v \in H} \left(\frac{1}{2} a(v, v) - f(v) \right), \quad \hat{u} \in H. \tag{2}$$

$$\begin{cases} -\Delta u = f \text{ en } \Omega \\ u = 0 \text{ sobre } \Gamma. \end{cases}$$

$u \in H_0^1(\Omega)$ es una solución débil si y sólo si

$$\int_\Omega \nabla v \cdot \nabla u dx = \int_\Omega f v dx \;\forall v \in H_0^1(\Omega).$$

El Teorema de Lax Milgram nos garantiza le existencia de soluciones débiles.

REPASO ANÁLISIS FUNCIONAL

Espacio Dual

Dado X un espacio vectorial, definimos el dual algebraico de X

$$X^* = \{f : X \to K,\ f \text{ es lineal}\}$$

X^* es un espacio vectorial.

$$X^{**} = \{f : X^* \to K,\ f \text{ lineal}\}$$

Dado $x_0 \in X$ podemos obtener $g_{x_0} \in X^{**}$ de la siguiente manera

$$g_{x_0}(f) = f(x_0), \quad f \in X^*$$

Se puede definir Λ

$$\Lambda : X \longrightarrow X^{**}$$
$$x \longmapsto g_x$$

Λ se conoce como la inyección canónica de X en X^{**}.

Espacio reflexivo

Cuando X es espacio vectorial normado podemos fijarnos en $X' \subset X^*$

$$X' = \{f \in X^* \mid f \text{ es continua}\}$$

A X' se le llama dual topológico o simplemente dual de X.
$X'' = (X')'$
Se dice que X es reflexivo si $\Lambda : X \to X''$ es sobreyectivo.

Convolución

Dado $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ y $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ con $1 \leq p \leq \infty$ definimos la convolución de f con g como:

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)dy$$

Teorema

Para casi todo $x \in \mathbb{R}^N$ la función $y \mapsto f(x-y)g(y)$ es integrable en $\mathbb{R}^N$. Además $f * g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ y

$$\|f * g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^1}\|g\|_{L^p}.$$

En $\mathbb{R}^N$ definimos

$$\rho(x) = \begin{cases} Ce^{\frac{-1}{1-|x|^2}} \text{ si } |x| < 1, \\ 0 \text{ si } |x| \geq 1. \end{cases} \tag{3}$$

donde $|x| = (\sum_{i=1}^n x_i^2)^{1/2}$. Se tiene que ρ es una función en $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ con soporte en $B_1 = \{x : |x| \leq 1\}$. Elijamos $C > 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \rho(x)dx = 1$$

y definimos

$$\rho_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\rho(\frac{x}{\varepsilon}). \tag{4}$$

tenemos que

$$\rho_\varepsilon \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N), \mathrm{Supp}\ \rho_\varepsilon \subset B_\varepsilon(0), \int_{\mathbb{R}^N} \rho_\varepsilon(x)dx = 1.$$

Para $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ definimos la *sucesión regularizante* de u como

$$u_\varepsilon(x) = \int_\Omega u(y)\rho_\varepsilon(x-y)dy = (\rho_\varepsilon * u)(x).$$

Si $x \in \Omega$, u_ε está definida siempre que

$$\varepsilon < \text{dist}(x, \partial\Omega).$$

Tenemos el siguiente resultado:

Teorema

Sea $\Omega' \subset\subset \Omega$.

1. *Para* $\varepsilon < dist(\Omega', \partial\Omega)$, $u_\varepsilon \in C^\infty(\Omega')$.
2. *Si* $u \in C(\Omega)$ *entonces cuando* $\varepsilon \to 0$
$$u_\varepsilon \to u \ \text{ uniformemente en } \Omega'.$$
3. *Si* $u \in L^p_{loc}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$. *Entonces, cuando* $\varepsilon \to 0$
$$u_\varepsilon \to u \text{ en } L^p(\Omega').$$

Espacios de Sobolev

Definición

Sea $k \geq 0$ *y* $p \in [1, \infty]$. *Definimos*

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^n \text{ con } |\alpha| \leq k\}$$

Ejemplo

Para $k = 0$, $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$, *Para* $k = 1$

$$W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega), \forall i : 1 \leq i \leq n\}$$

Si $k = 2$

$$W^{2,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_k} \in L^p(\Omega), \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} \in L^p(\Omega), \forall i, j, k : 1 \leq i \leq n\}$$

Consideramos la norma en $W^{k,p}(\Omega)$

$$\|u\|_{k,p} = \left(\sum_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p}^p \right)^{1/p} \quad \text{si } 1 \leq p < \infty,$$

$$\|u\|_{k,\infty} = \max_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha u\|_{L^\infty} \ \text{ si } p = \infty,$$

Definimos

$$\tau_h u(x) = u(x+h).$$

Caracterización

Teorema

Sea $u \in L^p(\Omega)$ con $1 < p \leq \infty$. Las siguientes propiedades son equivalentes:

(i) $u \in W^{1,p}(\Omega)$

(ii) *Existe una constante $C > 0$ tal que*

$$\left|\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right| \leq C\|\varphi\|_{L^{p'}(\Omega)} \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \forall i = 1, \cdots, N$$

(iii) *Existe una constante $C > 0$ tal que para todo abierto $\omega \subset\subset \Omega$ y todo $h \in \mathbb{R}^N$ con $|h| <$ dist $(\omega, \partial\Omega)$ se verifica*

$$\|\tau_h u - u\|_{L^p(\omega)} \leq C|h|$$

Además se puede elegir $C = \|\nabla u\|_{L^p}$ en (i) y (ii)

Demostración

(i)$\Rightarrow$ (ii) Por definición de derivada en el sentido de distribuciones.

(ii)$\Rightarrow$ (i)

La forma lineal

$$\varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \mapsto \int u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}.$$

definida en un subespacio denso de $L^{p'}(\Omega)$ es continua con la norma de $L^{p'}(\Omega)$. Por el Teorema de Hahn-Banach se extiende a una forma lineal y continua F_i en $L^{p'}(\Omega)$. Por el Teorema de representación de Riesz, existe $g_i \in L^p(\Omega)$ tal que

$$< F_i, \varphi >= \int g_i \varphi \quad \forall \varphi \in L^{p'}(\Omega).$$

i)$\Rightarrow$ (iii) Supongamos que $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$. Sea $h \in \mathbb{R}^N$. Definimos

$$v(t) = u(x + th), t \in \mathbb{R}.$$

Entonces $v'(t) = h \cdot \nabla u(x + th)$ y entonces

$$u(x+h) - u(x) = v(1) - v(0) = \int_0^1 v'(t)dt = \int_0^1 h \cdot \nabla u(x + th)dt$$

Por tanto

$$|\tau_h u(x) - u(x)|^p \le |h|^p \int_0^1 |\nabla u(x + th)|^p dt$$

y

$$\int_\omega |\tau_h u(x) - u(x)|^p \le |h|^p \int_\omega \int_0^1 |\nabla u(x + th)|^p dtdx$$

$$= |h|^p \int_0^1 \int_{\omega + th} |\nabla u(y)|^p dydt \le |h|^p \int_0^1 \int_\Omega |\nabla u(y)|^p dydt.$$

(iii)$\Rightarrow$ (ii) Sea $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ Sea $\omega \subset\subset \Omega$ con sop$\varphi \subset \omega$). Sea $h \in \mathbb{R}^N$ con $|h| > \text{dist}(\omega, \partial\Omega)$.

Gracias a (iii) y Hölder

$$\left| \int_\omega (\tau_h u(x) - u(x))\varphi \right| \leq C|h| \, \|\varphi\|_{L^{p'}}$$

Por otro lado

$$\int_\Omega (u(x+h) - u(x))\varphi(x)dx = \int_\Omega u(y)(\varphi(y-h) - \varphi(y))dy$$

por tanto

$$\left| \int_\Omega u(y) \frac{(\varphi(y-h) - \varphi(y))}{|h|} dy \right| \leq C \, \|\varphi\|_{L^{p'}}$$

eligiendo $h = te_i$ se obtiene(ii)

Teorema

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *un abierto no vacío,* $k \geq 0$ *y* $p \in [1, \infty]$*.*

1. $W^{k,p}(\Omega)$ *es un espacio de Banach y* $H^k(\Omega)$ *es un espacio de Hilbert.*
2. $W^{k,p}(\Omega)$ *es un espacio reflexivo si* $p \in (1, \infty)$
3. $W^{k,p}(\Omega)$ *es un espacio separable si* $p \in [1, \infty)$
4. $\mathcal{D}(\Omega) \subset W^{k,p}(\Omega)$*.*
5. *Si* $|\Omega| < \infty$*, entonces* $C^k(\overline{\Omega}) \subset W^{k,p}(\Omega)$*.*

$$u_\varepsilon(x) = \int_\Omega u(y)\rho_\varepsilon(x-y)dy = (\rho_\varepsilon * u)(x).$$

Lema

Sea $u \in L^p(\Omega)$ con $p \in [1,\infty]$ tal que $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$ para cierto multiídice α. Entonces, si $x \in \Omega$ y $0 < \varepsilon < dist(x, \partial\Omega)$, se verifica

$$D^\alpha u_\varepsilon(x) = (D^\alpha u)_\varepsilon(x).$$

Demostración Sea $x \in \Omega$, $0 < \varepsilon < \text{dist}(x, \partial\Omega)$. Como $u, D^\alpha u \in L^p(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ se tiene que

$$\int_\Omega (D^\alpha u)\varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u D^\alpha \varphi dx, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{5}$$

Por otro lado,

$$D^\alpha u_\varepsilon(x) = \int_\Omega D_x^\alpha(\rho_\varepsilon(x-y))u(y)dy = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega D_y^\alpha(\rho_\varepsilon(x-y))u(y)dy$$

Debido a que $x \in \Omega$ y $0 < \varepsilon < \text{dist}(x, \partial\Omega)$, tenemos que

$$\text{sop}\rho_\varepsilon(x - \cdot) = \overline{B}(x, \varepsilon) \subset \Omega \Rightarrow \rho_\varepsilon(x - \cdot) \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Aplicamos (**??**) y deducimos el resultado.

Teorema

Sea $p \in [1, \infty)$ y $u \in L^p(\Omega)$ tal que $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$ para cierto multiídice α. Entonces,

$$u_\varepsilon \to u \text{ en } L^p(\Omega) \quad \text{ y } D^\alpha u_\varepsilon \to D^\alpha u \text{ en } L^p_{loc}(\Omega)$$

Teorema (Teorema de Friedrichs)

Sea $u \in W^{k,p}(\Omega)$ con $k \geq 1$ y $p \in [1, \infty)$. Entonces, existe una sucesión $\{\varphi_n\} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$\varphi_n|_\Omega \to u \text{ en } L^p(\Omega) \text{ y } D^\alpha \varphi_n|_{\Omega'} \to D^\alpha u|_{\Omega'}, \forall \alpha : 0 < |\alpha| \leq k \text{ y } \forall \Omega' \subset\subset \Omega.$$

Demostración Regularización Sea $u \in W^{k,p}(\Omega)$ y $\varepsilon_n \downarrow 0$. Sea $u_n = \rho_{\varepsilon_n} * u \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$. Sabemos que $u_n \to u$ en $L^p(\Omega)$. Fijado $\Omega' \subset\subset \Omega$ y α, a partir de cierto n_0 se verifica $0 < \varepsilon_n < \frac{1}{2}\mathrm{dist}(\Omega', \partial\Omega)$. Así,

$$D^\alpha u_n(x) = (D^\alpha u)_{\varepsilon_n}(x) \text{ c.t.p. } x \in \Omega'.$$

Como $D^\alpha u \in L^p(\Omega')$ concluimos que $D^\alpha u_n|_{\Omega'} \to D^\alpha u|_{\Omega'}$ en $L^p(\Omega')$.

Truncamiento Sea $\xi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$

$$\xi(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } |x| \leq 1, \\ 0 \text{ si } |x| \geq 2. \end{cases}$$

Definimos $\xi_n(x) = \xi(x/n)$. $\xi_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$

$$\xi_n(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } |x| \leq n, \\ 0 \text{ si } |x| \geq 2n. \end{cases}$$

Sea $\varphi_n = u_n \xi_n$. Claramente $\varphi_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$

Veamos que φ_n satisface el teorema.

- $\varphi_n|_\Omega \to u$ en $L^p(\Omega)$. Basta ver

$$\|\varphi_n|_\Omega - u\|_{L^p} \leq \|u_n - u\|_{L^p} + \|u(\xi_n - 1)\|_{L^p}.$$

  Usar el Teorema de la CD de Lebesgue para ver que el último sumando tiende a cero.

- $D^\alpha \varphi_n = \xi_n D^\alpha u_n + \sum_{\beta \leq \alpha, \beta \neq 0} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} D^\beta \xi_n \mathcal{D}(\Omega)^{\alpha-\beta} u_n.$

$$\xi_n D^\alpha u_n|_{\Omega'} \to D^\alpha u|_{\Omega'} \text{ en } L^p(\Omega')$$

  El resto de los sumandos tiende a cero pues

$$\|D^\beta \xi_n D^{\alpha-\beta} u_n\|_{L^p(\Omega')} \leq \frac{C_\beta}{n^{|\beta|}} \|D^{\alpha-\beta} u_n\|_{L^p(\Omega')} \leq \frac{\widetilde{C}_\beta}{n^{|\beta|}}$$

Teorema (Operador extensión)

Suponga $1 \leq p \leq \infty$, Ω *es acotado y de clase* C^1, *consideremos un conjunto abierto* V *tal que* $\Omega \subset\subset V$ *entonces existe un operador lineal*

$$E : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$$

tal que, para cada $u \in W^{1,p}(\Omega)$,

(I) $Eu = u$ *c.s. en* Ω.

(II) $sop(Eu) \subset V$.

(III) *Existe una constante* $C = C(n, p, \Omega, V)$ *tal que*

$$\|Eu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} .$$

Llamamos a Eu la extensión de u a $\mathbb{R}^N$.

Definición

Sea $1 \leq p < N$*, el exponente crítico de Sobolev* p^* *se define como*

$$p^* = \frac{Np}{N-p} \quad \textit{donde} \quad \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}.$$

Teorema (Sobolev-Gagliardo-Nirenberg)

Suponga que $1 \leq p < N$*, entonces se tiene la siguiente inclusión*

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^q(\mathbb{R}^N),$$

donde $q \in [p, p^*]$*. Más aún, existe una constante* C *dependiente de* p *y* N *tal que*

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq C \, \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \quad \forall u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N). \tag{6}$$

El valor de p^* se puede obtener con un argumento de homeogeneidad muy sencillo: Si existen C y $1 \leq q \leq \infty$ tales que

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \quad \forall u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \tag{7}$$

entonces $q = p^*$.

Para verlo, se ponen en (**??**) $u_\lambda(x) = u(\lambda x)$ con $\lambda > 0$ en lugar de u

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leq C\lambda^{1+\frac{N}{q}-\frac{N}{p}} \|\nabla u\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \quad \forall \lambda > 0$$

Corolario

Sea $1 \leq p < N$. *Entonces*

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^q(\mathbb{R}^N) \quad \forall q \in [p, p^*].$$

Demostración, corolario

Dado $p \leq q \leq p^*$ lo escribimos como

$$\frac{1}{q} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{p^*} \text{ con } 0 \leq \alpha \leq 1.$$

Se sabe (interpolación espacios L^p) que

$$\|u\|_{L^q} \leq \|u\|_{L^p}^{\alpha} \|u\|_{L^{p^*}}^{1-\alpha}$$

Por la desigualdad de Young

$$\|u\|_{L^q} \leq \alpha \|u\|_{L^p} + (1-\alpha) \|u\|_{L^{p^*}}$$

Corolario (Caso límite $p = N$)

$$W^{1,N}(\mathbb{R}^N) \subset L^q(\mathbb{R}^N) \quad \forall q \in [N, \infty).$$

Teorema (Morrey)

Sea $p > N$, entonces

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^\infty(\mathbb{R}^N).$$