Introducción a los Espacios de Sobolev- Aula 3

Luz de Teresa

Janeiro 2021

Escola de verão 2021, UFPB

UFPB

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Definición

$H^1(\Omega)$ es el subespacio de $L^2(\Omega)$ definido como

$$H^1(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) | \partial_{x_i} v \in L^2(\Omega), \forall i = 1, \cdots, n.\}.$$

Para $u, v \in H^1(\Omega)$ podemos definir el producto interior

$$(u, v)_{1,2} = \int_\Omega (uv + \nabla u \cdot \nabla v)\, dx. \tag{1}$$

Aquí

$$\nabla u \cdot \nabla v = \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i} u \partial_{x_i} v.$$

Teorema

El espacio vectorial $H^1(\Omega)$ *dotado del producto interior* (1) *es un espacio de Hilbert con la norma*

$$\|u\|_{1,2} = \left[\int_\Omega u^2 + |\nabla u|^2 dx\right]^{1/2}.$$

Definición

$$H_0^1(\Omega) = \text{ la cerradura de } \mathcal{D}(\Omega) \text{ en } H^1(\Omega).$$

Teorema (Teorema de Poincaré)

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado en una dirección, entonces existe una constante $C(\Omega) > 0$ tal que para todo $u \in H_0^1(\Omega)$ se tiene

$$\int_\Omega |u|^2 dx \leq C(\Omega) \int_\Omega |\nabla u|^2 dx. \tag{2}$$

En particular si definimos $|u|_1 = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)^{1/2}$ obtenemos una norma en $H_0^1(\Omega)$ equivalente a la norma $\|u\|_{1,2}$.

Corolario

La desigualdad de Poincaré implica que, cuando Ω es acotado, $H_0^1(\Omega) \subsetneq H^1(\Omega)$

Denotamos

$$\left(H_0^1(\Omega)\right)' = H^{-1}(\Omega).$$

Dual

Teorema

$F \in H^{-1}(\Omega)$ ssi existen $f_0, f_1, \cdots, f_n \in L^2(\Omega)$ tal que

$$F = f_0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}. \tag{3}$$

Demostración: Supongamos en primer lugar dadas $f_0, f_1, \ldots, f_N \in L^2(\Omega)$. Es ver que la forma lineal F definida por

$$F(v) = \int_\Omega (f_0\, v + \sum_{i=1}^{N} f_i\, \partial_i v)\, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{4}$$

es continua. Por tanto, $F \in H^{-1}(\Omega)$. Además,

$$|F(v)| \le \|f_0\|_{L^2}\|v\|_{L^2} + \sum_{i=1}^{N} \|f_i\|_{L^2}\|\partial_i v\|_{L^2} \le \left(\sum_{i=0}^{N} \|f_i\|_{L^2}^2\right)^{1/2} \|v\|_{H^1}.$$

Recíprocamente, sea $F \in H^{-1}(\Omega)$. Por el teorema de Representación de Riesz existe $u_F \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\|u_F\|_{H^1} = \|F\|_{H^{-1}}, \quad (u_F, v)_{H^1} = F(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Tomamos $f_0 = u_F$ y $f_i = \partial_i u_F$ para $1 \leq i \leq N$

$W^{1,p}$

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto no vacío. Para $1 \leq p \leq \infty$, definimos

$$W^{1,p}(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega) | \nabla f \in L^p(\Omega)^N\}$$

donde en el conjunto anterior el gradiente de f está tomado en el sentido de distribuciones. El espacio $W^{1,p}(\Omega)$ está dotado de la norma

$$\|u\|_{1,p} = \left(\int |u|^p + |\nabla u|^p \right)^{1/p}.$$

Teorema

Sea Ω un abierto acotado de clase de C^1 en $\mathbb{R}^n$ y $1 \leq p < \infty$. Entonces existe un operador lineal y acotado

$$T : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$$

tal que

1. $Tu = u|_{\partial\Omega}$ *para todo* $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$
2. *Existe una constante* $C > 0$*, que sólo depende de* p *y de* Ω*, tal que*
$$\|Tu\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \text{ para todo } u \in W^{1,p}(\Omega)$$
3. $$u \in W_0^{1,p}(\Omega) \text{ si y sólo si } Tu = 0 \text{ en } \partial\Omega.$$

De manera general, $m \in \mathbb{N}$.

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto no vacío. Para $1 \leq p \leq \infty$, definimos

$$W^{m,p}(\Omega) = \{f \in W^{m-1,p}(\Omega) | \partial_{x_i} f \in L^p(\Omega)^N, i = 1 \cdots N\}$$

$$\|u\|_{m,p} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha f\|_p^p \right)^{1/p}.$$

$$\boxed{H^1 = W^{1,2},\ H^m = W^{m,2}}.$$

Solución problema de Poisson

Solución problema de Poisson

$$\begin{cases} -\Delta u = f \text{ en } \Omega \\ u = 0 \text{ sobre } \Gamma. \end{cases}$$

Si $f \in C(\Omega)$ decimos que u es solución fuerte si $u \in C^2(\Omega)$ satisface punto a punto $-\Delta u = f$

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial^2_{x_1}} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial^2_{x_1}}$$

Sea $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Si multiplicamos ambos lados por φ e integramos en Ω obtenemos

$$\int_\Omega -\Delta u \varphi dx = \int_\Omega f \varphi dx.$$

Como

$$(-\Delta u)\varphi = -\mathrm{div}(\varphi \nabla u) + \nabla \varphi \cdot \nabla u$$

tenemos que

$$\int_\Omega (-\mathrm{div}(\varphi \nabla u) + \nabla \varphi \cdot \nabla u) dx = \int_\Omega f \varphi dx.$$

Solución problema de Poisson

Por el Teorema de la divergencia, como $\varphi|_{\partial\Omega} = 0$

$$\int_\Omega \nabla\varphi \cdot \nabla u dx = \int_\Omega f\varphi dx \; \forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{5}$$

Solución problema de Poisson

En realidad lo anterior tiene sentido si $u \in H_0^1(\Omega)$. Por esta razón decimos que (5) es la formulación débil del problema de Poisson y decimos que u es *solución débil* de si u es tal que

$$\begin{cases} u \in H_0^1(\Omega) \\ \displaystyle\int_\Omega \nabla v \cdot \nabla u dx = \int_\Omega f v dx \; \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

Solución débil

Teorema

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto no vacío y acotado en una dirección. Sea $f \in H^{-1}(\Omega)$. Entonces, existe una única solución u del problema

$$\begin{cases} u \in H_0^1(\Omega) \\ \displaystyle\int_\Omega \nabla v \cdot \nabla u dx = < f, v > \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \tag{5}$$

donde $< f, v >$ denota la dualidad $H^{-1}(\Omega) - H_0^1(\Omega)$.

El Teorema de Lax-Milgram

Sea H un espacio de Hilbert (sobre $\mathbb{R}$).

$$a : H \times H \to \mathbb{R}$$

es bilineal si

$$a(\cdot, v) : H \to \mathbb{R}$$

es lineal para toda $v \in H$ y

$$a(u, \cdot) : H \to \mathbb{R}$$

es lineal para toda $u \in H$. Es continua si existe $C > 0$ tal que

$$|a(u, v)| \leq C\|u\|\|v\|, \forall u, v \in H.$$

Es coercitiva si existe $\alpha > 0$ tal que

$$a(u, u) \geq \alpha\|u\|^2.$$

Teorema

Sea $a : H \times H \to \mathbb{R}$ *una forma bilineal, continua y coercitiva y sea* $f \in H'$. *Entonces, existe un único* $u \in H$ *tal que*

$$a(u, v) =< f, v > \forall v \in H.$$

Si además a *es simétrica, i.e.* $a(u, v) = a(v, u)$, *entonces* u *es el único minimizador del funcional*

$$J(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - < f, v > .$$

Teorema de Lax-Milgram

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v$$

$$\boxed{\text{es un funcional bilineal, continuo y coercitivo en } H_0^1(\Omega)}$$

El Teorema de Lax Milgram nos garantiza la existencia de una única solución u, solución débil del problema de Poisson.

Resultados auxiliares

Teorema

Sean H un espacio de Hilbert, $K \subset V$ un convexo cerrado no vacío y $\Phi : V \mapsto \mathbb{R}$ una función continua y convexa. Supongamos que, o bien K es acotado, o bien Φ es coerciva en K, esto es, verifica

$$\lim_{v \in K,\, \|v\| \to +\infty} \Phi(v) = +\infty.$$

Entonces existe al menos un punto $u \in H$ que verifica

$$\Phi(u) \leq \Phi(v) \quad \forall v \in K, \quad u \in K.$$

Además, si Φ es estrictamente convexa, el punto u es único.

Sean H un espacio de Hilbert y $A \subset H$ un subconjunto no vacío. Por definición, el *ortogonal* de A es el conjunto

$$A^{\perp} = \{\, x \in H : (x, y) = 0 \ \ \forall y \in A \,\}.$$

Es fácil probar que $A^{\perp}$ es un subespacio cerrado de H, que $A^{\perp} = \overline{A}^{\perp}$ y que $A^{\perp} \cap A \subset \{0\}$.

Teorema

Sean H un espacio de Hilbert, $K \subset H$ un convexo cerrado no vacío y $x_0 \in H$. Entonces existe un único punto $\hat{x}$ que verifica

$$\|\hat{x} - x_0\| = \inf_{x \in K} \|x - x_0\|, \quad \hat{x} \in K. \tag{6}$$

Además, $\hat{x}$ es el único punto de H que verifica

$$\begin{cases} \hat{x} \in K, \\ (x_0 - \hat{x}, x - \hat{x}) \leq 0 \quad \forall x \in K. \end{cases} \tag{7}$$

Demostración: La existencia y unicidad de solución de (6) es consecuencia del teorema 10

Veamos que (6) y (7) son equivalentes.

Si $\hat{x}$ verifica (6), entonces para cada $x \in K$ y cada $t \in (0,1)$, se tiene que

$$\begin{aligned} \|\hat{x} - x_0\|^2 &\leq \|(tx + (1-t)\hat{x}) - x_0\|^2 \\ &= \|\hat{x} - x_0\|^2 - 2t(x_0 - \hat{x}, x - \hat{x}) + t^2\|\hat{x} - x\|^2, \end{aligned}$$

de donde

$$2t(x_0 - \hat{x}, x - \hat{x}) \leq t^2\|x - \hat{x}\|^2.$$

Dividiendo por t y haciendo tender t a 0, obtenemos (7).

Recíprocamente, si $\hat{x}$ verifica (7), para cada $x \in K$ se tiene

$$\begin{aligned} \|\hat{x} - x_0\|^2 &= (\hat{x} - x_0, \hat{x} - x) + (\hat{x} - x_0, x - x_0) \\ &\leq (\hat{x} - x_0, x - x_0) \leq \|\hat{x} - x_0\| \, \|x - x_0\|. \end{aligned}$$

Por tanto, también tenemos (6).

Remark

La caracterización (7) de $\hat{x}$ posee una sencilla interpretación geométrica: Por ejemplo, cuando $H = \mathbb{R}^N$ con la distancia Euclídea, $\hat{x}$ es el punto de K situado a la menor distancia posible de x_0. Por este motivo, $\hat{x}$ se denomina *proyección de x_0 sobre K*.

Remark

El teorema 11 puede ser también mirado como un resultado de existencia y unicidad de solución de (7).

Como caso particular del teorema 11, tenemos:

Teorema

Sean H un espacio de Hilbert, $M \subset H$ un subespacio cerrado y $x_0 \in H$. Entonces existe un único punto $\hat{x}$ que verifica

$$\|\hat{x} - x_0\| = \inf_{x \in M} \|x - x_0\|, \quad \hat{x} \in M. \tag{8}$$

Además, $\hat{x}$ es el único punto de H que verifica

$$\begin{cases} \hat{x} \in M, \\ x_0 - \hat{x} \in M^{\perp}. \end{cases} \tag{9}$$

El Teorema de Lax-Milgram

Teorema

Sea $a : H \times H \to \mathbb{R}$ *una forma bilineal, continua y coercitiva y sea* $f \in H'$. *Entonces, existe un único* $\hat{u} \in H$ *tal que*

$$a(\hat{u}, v) = f(v) \quad \forall v \in H, \quad \hat{u} \in H. \tag{10}$$

Si además a *es simétrica, i.e.* $a(u, v) = a(v, u)$, *entonces* $\hat{u}$ *está caracterizado por ser la única solución del problema de mínimos*

$$\frac{1}{2} a(\hat{u}, \hat{u}) - f(\hat{u}) = \inf_{v \in H} \left(\frac{1}{2} a(v, v) - f(v) \right), \quad \hat{u} \in H. \tag{11}$$

Demostración: Sea $f \in H'$ y sea $u_f \in H$ el punto de H asociado a f por el teorema R Riezs. Entonces (10) es equivalente a

$$A\hat{u} = u_f, \quad \hat{u} \in H, \tag{12}$$

donde $A\hat{u}(v) = a(\hat{u}, v)$

Gracias a

$$\|Av\| \geq \alpha\|v\| \quad \forall v \in H. \tag{13}$$

la ecuación en H, (12) posee a lo más una solución. Para demostrar que posee al menos una, veamos que el rango $R(A)$ de A es a la vez cerrado y denso en H.

Demostración (cont.)

Probar que $R(A)$ es denso equivale a probar que $R(A)^{\perp} = \{0\}$. Pero esto es inmediato: si $v \in R(A)^{\perp}$, entonces $0 = (Av, v) \geq \alpha \|v\|^2$, de donde $v = 0$.

Para probar que $R(A)$ es cerrado, supongamos que $u_n \in H$ para cada $n \geq 1$ y que $Au_n \to v$ en H y veamos que, en tal caso, $v \in R(A)$. Tenemos que

$$\alpha \|u_n - u_m\|^2 \leq (Au_n - Au_m, u_n - u_m) \leq \|Au_n - Au_m\| \, \|u_n - u_m\|,$$

de donde $\{u_n\}$ es una sucesión de Cauchy y necesariamente existe $u \in H$ tal que $u_n \to u$. Pero entonces $v = Au$ y en consecuencia $v \in R(A)$, como queríamos demostrar.

Para demostrar que $\hat{u}$ está caracterizado por (11) cuando $a(\cdot\,,\cdot)$ es simétrica, razonaremos como sigue. En este caso, $a(\cdot\,,\cdot)$ es un nuevo producto escalar en H y determina una norma $\|\cdot\|_a$ que es equivalente a la norma $\|\cdot\|$ de partida. Sea $f \in H'$. Por el teorema **??**, existe un único $\tilde{u}_f \in H$ que verifica

$$a(\tilde{u}_f, v) = f(v) \quad \forall v \in H, \tilde{u}_f \in H.$$

Por tanto, la solución de (10) es $\hat{u} = \tilde{u}_f$, es decir, el único punto de H que minimiza la cantidad $\|v - \tilde{u}_f\|_a^2$. Teniendo en cuenta que

$$\frac{1}{2}\|v - \tilde{u}_f\|_a^2 = \frac{1}{2}a(v, v) - f(v) + \frac{1}{2}\|\tilde{u}_f\|_a^2 \quad \forall v \in H,$$

se deduce que $\hat{u}$ verifica (11).

Dimensión 1

Sea I un intervalo acotado, por Lax-Milgram, dada $f \in L^2(I)$ existe un único $u \in H_0^1(I)$ solución de

$$\int_I u_x v_x = \int_I fv, \ \forall v \in H_0^1(I).$$

En particular, para $v \in \mathcal{D}(I)$ se satisface.....

Por definición derivada segunda en sentido de distribuciones tenemos que

$$-u_{xx} = f \text{ en } L^2(I).$$

Es decir, se satisface la ecuación en $L^2(I)$ y $u \in H^2(I)$.

MÁS REGULARIDAD

Las inclusiones de Sobolev, indican que $u \in C(\bar{I})$ y como $u \in H^2(I)$ tenemos que $u' \in C(\bar{I})$. Si $f \in C(\bar{I})$ tenemos que $u \in C^2(\bar{I})$ y es una solución clásica.

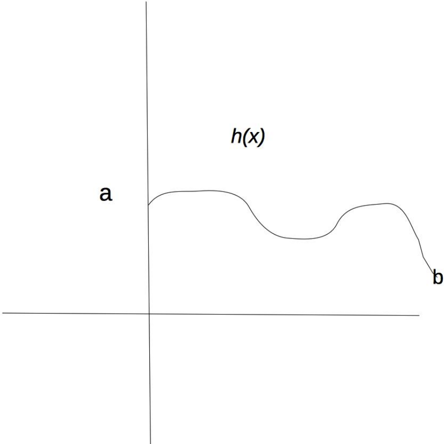
Otras condiciones de frontera

Buscamos resolver

$$\begin{cases} -u_{xx} = f \text{ en } I = (0,1) \\ u(0) = a,\ u(1) = b. \end{cases}$$

Otras condiciones de frontera

Construimos $h(x) \in C^2[0,1]$ tal que $h(0) = a, h(1) = b$



Otras condiciones de frontera

Entonces $v = u - h$ sería solución de

$$\begin{cases} -v_{xx} = f + h_{xx} \text{ en } I = (0,1) \\ v(0) = 0, \ v(1) = 0. \end{cases}$$

y estamos en la situación anterior.

Problema de Sturm-Liouville

Queremos resolver para $p \in C^1(\bar{I})$, $q \in C(\bar{I})$ y $f \in L^2(I)$

$$\begin{cases} -(pv_x)_x + qv = f \text{ en } I = (0,1) \\ v(0) = 0, \ v(1) = 0. \end{cases}$$

con

$$p(x) \geq \alpha > 0.$$

Problema de Sturm-Liouville

Queremos resolver para $p \in C^1(\bar{I})$, $q \in C(\bar{I})$ y $f \in L^2(I)$

$$\begin{cases} -(pv_x)_x + qv = f \text{ en } I = (0,1) \\ v(0) = 0, \ v(1) = 0. \end{cases}$$

con

$$p(x) \geq \alpha > 0.$$

Si v es solución clásica, tenemos que

$$\int_I pv_x u_x + \int_I qvu = \int_I fu.$$

Si $q \geq 0$ tenemos que

$$a(v, u) = \int_I p v_x u_x + \int_I q v u$$

es bilineal, continua y coercitiva en $H_0^1(I)$.

Buscamos resolver

$$\begin{cases} -u_{xx} + u = f \text{ en } I = (0,1) \\ u_x(0) = 0, \ u_x(1) = 0. \end{cases}$$

Teorema

Para toda $f \in L^2(I)$ existe $u \in H^2(I)$ única solución del problema de Neumann, u viene dada por

$$\min_{v \in H^1} \left\{ \frac{1}{2} \int_I (v_x^2 + v^2) - \int_I fv \right\}.$$

Si $f \in C(\bar{I})$ entonces $u \in C^2(\bar{I})$.

Condiciones Neumann

Si u es solución clásica, se tiene que

$$\int_I u_x v_x + \int_I uv = \int_I fv, \quad \forall v \in H^1(I).$$

Condiciones Neumann

Tenemos que trabajar en $H^1(I)$ no en $H^1_0(I)$.

Por el teorema de Lax-Milgram existe una única solución $u \in H^1(I)$ solución débil.

Tenemos que

$$\int_I u_x v_x = \int_I (f-u)v, \quad \forall v \in \mathcal{D}(I).$$

Condiciones Neumann

Tenemos que

$$\int_I u_x v_x = \int_I (f - u)v, \quad \forall v \in \mathcal{D}(I).$$

Esto nos indica que

$$-u_{xx} \in L^2(I).$$

Por tanto $u \in H^2(I)$.

Condiciones Neumann

Esto nos indica que

$$-u_{xx} \in L^2(I).$$

Por tanto $u \in H^2(I)$. Las inclusiones de Sobolev nos dicen que $u \in C^1(\bar{I})$. Podemos "deshacer" la integración por partes y obtenemos

$$\int_I (-u_{xx} + u - f)v + u_x(1)v(1) - u_x(0)v(0) = 0 \quad \forall v \in H^1(I).$$

Condiciones Neumann

Las inclusiones de Sobolev nos dicen que $u \in C^1(\bar{I})$. Podemos "deshacer" la integración por partes y obtenemos

$$\int_I (-u_{xx} + u - f)v + u_x(1)v(1) - u_x(0)v(0) = 0 \quad \forall v \in H^1(I).$$

Tomamos ahora $v \in H_0^1(I)$, con lo que

$$\int_I (-u_{xx} + u - f)v = 0$$

$$-u_{xx} + u = f \text{ en } L^2(I).$$

Entonces

$$u_x(1)v(1) - u_x(0)v(0) = 0, \forall v \in H^1(I)$$

Se deduce que

$$u_x(1) = 0, \; u_x(0) = 0$$

Plan futuro

- Estudiar inclusiones de Sobolev.