Introducción a los Espacios de Sobolev- Aula 2

Luz de Teresa

Janeiro 2021

Escola de verão 2021, UFPB

UFPB

Departamento de Matemática

Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto Lebesgue medible,

Definición

$$\mathcal{L}^1(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R};\ \textit{medibles tal que } \int_\Omega |f(x)|dx < \infty\}.$$

En este conjunto consideramos la relación de equivalencia R sobre $\mathcal{L}^1$,

$$fRg \iff f = g \text{ c.t.p.}$$

Se prueba que efectivamente es una relación de equivalencia y se define

$$\boxed{L^1(\Omega) = \mathcal{L}^1/R}$$

Sea $p \in \mathbb{R}$ con $1 < p < \infty$.

Definición

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}, f \textit{ medible y } |f|^p \in L^1(\Omega\}$$

con la norma

$$\|f\|_p = \left[\int_\Omega |f(x)|^p dx\right]^{1/p}.$$

Teorema

$L^p(\Omega)$ es un espacio de Banach. Con $p = 2$ es un espacio de Hilbert.

Definición

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}, f \textit{ medible y } \exists C > 0 : |f(x)| \leq C \textit{ c.t.p. en } \Omega\}$$

$$\|f\|_\infty = \text{ínf}\{C; |f(x)| \leq C \textit{ c.t.p. en } \Omega\}.$$

Medida y $L^p(\Omega)$ II

Teorema

Para cada $p \in [1, +\infty)$, $\mathcal{D}(\Omega)$ *es denso en* $L^p(\Omega)$.

Corolario

Sea $u \in L^2(\Omega)$ *tal que*

$$\int_\Omega u\varphi \, dx = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Entonces $u = 0$ *c.p.d.*

Demostración: Gracias al teorema, $\mathcal{D}(\Omega)$ es un subespacio denso de $L^2(\Omega)$. Por tanto, $\mathcal{D}(\Omega)^\perp = \{0\}$ y, en las condiciones del corolario, $u \in \mathcal{D}(\Omega)^\perp$.

Corolario

Para cada $p \in [1, +\infty)$*,* $L^p(\Omega)$ *es un espacio de Banach separable.*

Ω' está fuertemente contenido en Ω si $\overline{\Omega}'$ es compacto y $\overline{\Omega}' \subset \Omega$ y denotamos

$$\Omega' \subset\subset \Omega.$$

Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ y $1 \leq p \leq \infty$

Definición

$$L^p_{loc}(\Omega) = \{v \in L^p(\Omega')\, \forall \Omega' \subset\subset \Omega\}.$$

Sea $\mathcal{D}(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}; C_c^\infty(\Omega)\}$

Definición

Sea φ_i una sucesión de funciones de $\mathcal{D}(\Omega)$. Diremos que φ_i converge en $\mathcal{D}(\Omega)$ a φ si existe $K \subset \Omega$ un conjunto compacto tal que $\operatorname{Supp} \varphi_i \subset K$ para toda $i \in \mathbb{N}$ y si para todo multiíndice $\alpha \in \mathbb{N}^n$

$$D^\alpha \varphi_i \to D^\alpha \varphi \text{ uniformemente en } K,$$

es decir

$$\lim_{i\to\infty} \sup_{x\in K} |D^\alpha \varphi_i(x) - D^\alpha \varphi(x)| = 0.$$

$\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$, $D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n}}$

Definición

Diremos que T es una distribución en Ω si

$$T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$$

es lineal y "continua" en el siguiente sentido:

$$\lim_{i\to\infty} T(\varphi_i) = T(\varphi)$$

para toda φ_i que converge en $\mathcal{D}(\Omega)$ a φ.
Denotamos $T(\varphi)$ como $< T, \varphi >$ y el espacio de distribuciones sobre Ω como $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Ejemplos

Sea $T \in L^1_{loc}(\Omega)$. Entonces la aplicación

$$< T, \varphi >= \int_\Omega T(x)\varphi(x)dx$$

es una distribución. Esto se tiene de la linealidad de la integral y de que

$$| < T, \varphi_i - \varphi > | \leq \sup_{x\in K} |\varphi_i - \varphi| \int_K |T(x)|dx.$$

Ejemplos

Sean T_1 y T_2 distribuciones y $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ entonces $\alpha_1 T_1 + \alpha_2 T_2$ son una distribución que actúa como

$$< \alpha_1 T_1 + \alpha_2 T_2, \varphi >= \alpha_1 < T_1, \varphi > + \alpha_2 < T_2, \varphi > \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Esto nos indica que $\mathcal{D}'(\Omega)$ es un espacio vectorial (sobre $\mathbb{R}$.).

Ejemplos

Delta de Dirac. Sea $x_0 \in \Omega$ definimos

$$< \delta_{x_0}, \varphi >= \varphi(x_0) \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

es una distribución. Decimos que esta distribución no es una FUNCIÓN pues no es posible encontrar $T \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega T(x)\varphi(x)dx = \varphi(x_0) \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Ejemplos

Para $\alpha \in \mathbb{N}^n$ y $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ definimos una nueva distribución

$$\varphi \mapsto (-1)^{|\alpha|} < T, D^\alpha \varphi >$$

Denotamos esta nueva distribución como $D^\alpha T$. Observa que

$$< D^\alpha T, \varphi >= (-1)^{|\alpha|} < T, D^\alpha \varphi > .$$

Ejemplos

Sea $G(x) = |x|,\ x \in (-1,1),\ \phi(x) \in \mathcal{D}(-1,1)$.

$$
\begin{aligned}
< G', \phi > = - < G, \phi' > \\
&= -\int_{-1}^{1} |x|\phi'(x) \\
&= \int_{-1}^{0} x\phi'(x) - \int_{0}^{1} x\phi'(x) \\
&= -\int_{-1}^{0} \phi(x) + x\phi(x)\Big|_{-1}^{0} + \int_{0}^{1} \phi(x) - x\phi(x)\Big|_{0}^{1} \\
&= -\int_{-1}^{0} \phi(x) + \int_{0}^{1} \phi(x)
\end{aligned}
$$

Ejemplos

Sea $G(x) = |x|,\; x \in (-1,1), \phi(x) \in \mathcal{D}(-1,1)$.

$$
\begin{aligned}
< G', \phi > = - < G, \phi' > \\
&= -\int_{-1}^{1} |x|\phi'(x) \\
&= \int_{-1}^{0} x\phi'(x) - \int_{0}^{1} x\phi'(x) \\
&= -\int_{-1}^{0} \phi(x) + x\phi(x)\Big|_{-1}^{0} + \int_{0}^{1} \phi(x) - x\phi(x)\Big|_{0}^{1} \\
&= -\int_{-1}^{0} \phi(x) + \int_{0}^{1} \phi(x)
\end{aligned}
$$

$$
G'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x \leq 1 \end{cases}
$$

Ejemplos

Definimos la función de Heaviside o de salto unidad:

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

Queremos calcular $H'(x)$ (en el sentido de distribuciones)

$$\begin{aligned} < H', \varphi > &= - < H, \varphi' > \\ &= -\int_{-1}^{1} H(x)\varphi'(x)dx \\ &= -\int_{0}^{1} \varphi'(x)dx = -\varphi(1) + \varphi(0) = \varphi(0) =< \delta_0, \varphi > . \end{aligned}$$

Sean $\Omega = (-1,1)\times(-1,1) \subset \mathbb{R}^2$ y g la función definida en Ω por

$$g(x_1,x_2) = \begin{cases} x_1 x_2 & \text{si } x_1 > 0, \\ x_1 & \text{si } x_1 \leq 0. \end{cases}$$

Sea $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$
\begin{aligned}
&< \partial_{x_1} g(x_1, x_2), \varphi >= - < g(x_1, x_2), \partial_{x_1}\varphi > \\
&= - \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{0} x_1 \partial_{x_1}\varphi(x_1, x_2) dx_1 dx_2 - \int_{-1}^{1}\int_{0}^{1} x_1 x_2 \partial_{x_1}\varphi(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \\
&= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{0} \varphi(x_1, x_2) dx_1 dx_2 - \int_{-1}^{1} x_1 \varphi(x_1, x_2)\Big|_{-1}^{0} \\
&\quad + \int_{-1}^{1}\int_{0}^{1} x_2 \varphi(x_1, x_2) dx_1 dx_2 - \int_{-1}^{1} x_1 x_2 \varphi(x_1, x_2)\Big|_{0}^{1}
\end{aligned}
$$

Sea $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$
\begin{aligned}
&< \partial_{x_1} g(x_1, x_2), \varphi >= - < g(x_1, x_2), \partial_{x_1} \varphi > \\
&= - \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{0} x_1 \partial_{x_1} \varphi(x_1, x_2) dx_1 dx_2 - \int_{-1}^{1} \int_{0}^{1} x_1 x_2 \partial_{x_1} \varphi(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \\
&= \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{0} \varphi(x_1, x_2) dx_1 dx_2 - \int_{-1}^{1} x_1 \varphi(x_1, x_2) \Big|_{-1}^{0} \\
&\quad + \int_{-1}^{1} \int_{0}^{1} x_2 \varphi(x_1, x_2) dx_1 dx_2 - \int_{-1}^{1} x_1 x_2 \varphi(x_1, x_2) \Big|_{0}^{1}
\end{aligned}
$$

$$
\partial_{x_1} g(x_1, x_2) = \begin{cases} x_2 & \text{si } x_1 > 0, \\ 1 & \text{si } x_1 \leq 0. \end{cases}
$$

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Definición

$H^1(\Omega)$ es el subespacio de $L^2(\Omega)$ definido como

$$H^1(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) | \partial_{x_i} v \in L^2(\Omega), \forall i = 1, \cdots, n.\}.$$

Para $u, v \in H^1(\Omega)$ podemos definir el producto interior

$$(u, v)_{1,2} = \int_\Omega (uv + \nabla u \cdot \nabla v)\, dx. \tag{1}$$

Aquí

$$\nabla u \cdot \nabla v = \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i} u \partial_{x_i} v.$$

Teorema

El espacio vectorial $H^1(\Omega)$ *dotado del producto interior* (1) *es un espacio de Hilbert con la norma*

$$\|u\|_{1,2} = \left[\int_\Omega u^2 + |\nabla u|^2 dx\right]^{1/2}.$$

Demostración: La norma es

$$\|v\|_{H^1} = \left(\|v\|_{L^2}^2 + \|\nabla v\|_{L^2}^2\right)^{1/2} \quad \forall v \in H^1(\Omega). \tag{2}$$

Tenemos que comprobar que toda sucesión de Cauchy para esta norma es convergente en $H^1(\Omega)$.

Sea entonces $\{u_n\}$ una tal sucesión. Claramente, $\{u_n\}$ y $\{\partial_i u_n\}$ $(1 \leq i \leq N)$ son sucesiones de Cauchy en $L^2(\Omega)$, de donde existen funciones $u, v_1, \ldots, v_N$ tales que

$$u_n \to u, \quad \partial_i u_n \to v_i \text{ en } L^2(\Omega) \quad (1 \leq i \leq N). \tag{3}$$

Veamos que, para cada i, v_i es la derivada en el sentido de distribuciones de u, con lo cual quedará probado que $u \in H^1(\Omega)$ y que $u_n \to u$ en $H^1(\Omega)$.

Dados i y $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, tenemos que

$$\int_\Omega \partial_i u_n \, \varphi \, dx = - \int_\Omega u_n \, \partial_i \varphi \, dx \tag{4}$$

para cada $n \geq 1$. Gracias a (3), podemos pasar al límite en (4) y deducir que

$$\int_\Omega v_i \, \varphi \, dx = - \int_\Omega u \partial_i \, \varphi \, dx. \tag{5}$$

Pero, como φ es arbitraria en $\mathcal{D}(\Omega)$, esto significa que u posee derivada en el sentido de distribuciones en $L^2(\Omega)$ respecto de x_i. Esto prueba lo que queríamos.

Definición

$$H_0^1(\Omega) = \textit{ la cerradura de } \mathcal{D}(\Omega) \textit{ en } H^1(\Omega).$$

Teorema (Teorema de Poincaré)

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado en una dirección, entonces existe una constante $C(\Omega) > 0$ tal que para todo $u \in H_0^1(\Omega)$ se tiene

$$\int_\Omega |u|^2 dx \leq C(\Omega) \int_\Omega |\nabla u|^2 dx. \tag{6}$$

En particular si definimos $|u|_1 = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)^{1/2}$ obtenemos una norma en $H_0^1(\Omega)$ equivalente a la norma $\|u\|_{1,2}$.

Demostración desigualdad de Poincaré

Por densidad de $\mathcal{D}(\Omega)$ en $H_0^1(\Omega)$ basta probarlo para $u \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Demostración desigualdad de Poincaré

Supondremos Ω acotado en x_n i.e. $x \in \Omega$ implica $x = (x', x_n)$ con $x' \in R^{n-1}$ y $a \leq x_n \leq b$.

Demostración desigualdad de Poincaré

Tenemos que

$$
\begin{aligned}
|u(x',s)| = |\int_a^s \partial_{x_n} u(x',t)dt| &\leq \int_a^s |\partial_{x_n} u(x',t)|dt \\
&\leq (s-a)^{1/2} \left(\int_a^s |\partial_{x_n} u(x',t)|^2 dt \right)^{1/2} \\
&\leq (s-a)^{1/2} \left(\int_a^b |\partial_{x_n} u(x',t)|^2 dt \right)^{1/2}.
\end{aligned}
$$

En consecuencia,

$$|u(x', s)|^2 \leq (s - a) \int_a^b |\partial_{x_n} u(x', t)|^2 dt.$$

y por tanto

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_a^b |u(x', s)|^2 ds dx' \leq \int_a^b (s - a) ds \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_a^b |\partial_{x_n} u(x', t)|^2 dt dx'$$

con lo que se tiene

Demostración desigualdad de Poincaré

$$\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{(b-a)^2}{2}|u|_1^2.$$

Corolario

La desigualdad de Poincaré implica que, cuando Ω *es acotado,* $H_0^1(\Omega) \subsetneq H^1(\Omega)$

Corolario

La desigualdad de Poincaré implica que, cuando Ω es acotado, $H_0^1(\Omega) \subsetneq H^1(\Omega)$

Si Ω es un conjunto acotado $u(x) \equiv 1$ pertenece a $H^1(\Omega)$. Sin embargo, $u \notin H_0^1(\Omega)$ ya que

$$\|u\|_{L^2} \leq C(\Omega)|u|_1$$

y por tanto

$$1 \leq 0,$$

lo que es imposible, así, $u \notin H_0^1(\Omega)$.

Dual

Denotamos

$$\left(H_0^1(\Omega)\right)' = H^{-1}(\Omega).$$

Teorema

$T \in H^{-1}(\Omega)$ si y solo si existen $T_0, T_1, \cdots, T_n \in L^2(\Omega)$ tales que

$$T = T_0 + \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i} T_i. \tag{7}$$