Introducción a los Espacios de Sobolev- Aula 1

Luz de Teresa

Janeiro 2021

Escola de verão 2021, UFPB

UFPB

Departamento de Matemática

Motivación

Algunas de las ecuaciones diferenciales parciales más importantes son la ecuación de Laplace

$$\Delta u = 0, \quad x \in \Omega$$

y la de Poisson

$$-\Delta u = f, \quad x \in \Omega$$

donde $\Delta g = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2}$

Motivación

Estas ecuaciones describen una amplia variedad de situaciones físicas.

- u es una densidad (e.g. concentración química) en equilibrio.

Motivación

Estas ecuaciones describen una amplia variedad de situaciones físicas.

- u es una densidad (e.g. concentración química) en equilibrio.
- $V \subset \Omega$ el flujo de u en ∂V es cero:

$$\int_{\partial V} F \cdot \nu dS = 0$$

donde ν es el vector normal y F la densidad de flujo.

Motivación

Estas ecuaciones describen una amplia variedad de situaciones físicas.

- u es una densidad (e.g. concentración química) en equilibrio.
- $V \subset \Omega$ el flujo de u en ∂V es cero:

$$\int_{\partial V} F \cdot \nu dS = 0$$

  donde ν es el vector normal y F la densidad de flujo.
- El teorema de Green nos dice que

$$\int_V \operatorname{div} F dx = \int_{\partial V} F \cdot \nu dS = 0.$$

Motivación

Estas ecuaciones describen una amplia variedad de situaciones físicas.

- u es una densidad (e.g. concentración química) en equilibrio.
- $V \subset \Omega$ el flujo de u en ∂V es cero:

$$\int_{\partial V} F \cdot \nu dS = 0$$

  donde ν es el vector normal y F la densidad de flujo.
- El teorema de Green nos dice que

$$\int_V \operatorname{div} F dx = \int_{\partial V} F \cdot \nu dS = 0.$$

-

$$\operatorname{div} F = 0 \quad \Omega$$

- Consideraciones físicas dicen que es razonable que F sea proporcional al gradiente ∇u pero en la dirección contraria

$$F = -a\nabla u, \; a > 0$$

- Consideraciones físicas dicen que es razonable que F sea proporcional al gradiente ∇u pero en la dirección contraria

$$F = -a\nabla u, \ a > 0$$

- Así obtenemos

$$\Delta u = 0$$

u es concentración química, temperatura, potencial electrostático etc....

$n = 2$

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$$

$n = 2$

- $$\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$$

- Invariante por translaciones: $x' = x + a, y' = y + b,$

$$u_{xx} + u_{yy} = u_{x'x'} + u_{y'y'}$$

$n = 2$

- $$\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$$

- Invariante por translaciones: $x' = x + a, y' = y + b$,

$$u_{xx} + u_{yy} = u_{x'x'} + u_{y'y'}$$

- Invariante por rotaciones $x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha$
  $y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha$,

$$u_{xx} + u_{yy} = u_{x'x'} + u_{y'y'}$$

Soluciones radiales

$$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$$

Soluciones radiales

- $$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$$

- $$u_{xx} + u_{yy} = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}$$

Soluciones radiales

- $$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$$
- $$u_{xx} + u_{yy} = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}$$
- Pero como es invariante por rotaciones
$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r = 0.$$

Soluciones radiales

- $$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$$

- $$u_{xx} + u_{yy} = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}$$

- Pero como es invariante por rotaciones
$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r = 0.$$

- $n = 2$
$$u = c_1 \ln r + c_2.$$

Soluciones radiales

- $$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$$

- $$u_{xx} + u_{yy} = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}$$

- Pero como es invariante por rotaciones
$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r = 0.$$

- $n = 2$
$$u = c_1 \ln r + c_2.$$

Sea

$$\Phi(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \ln |x| & (n = 2) \\ \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)} |x|^{2-n} & (n \geq 3) \end{cases}$$

con $\alpha(n)$ el volumen de la esfera unitaria......

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y) f(y) dy$$

es solución de

$$-\Delta u = f \text{ en } \mathbb{R}^n.$$

Funciones de Green

Queremos resolver

$$\begin{cases} -\Delta u = f & x \in \Omega \\ u = g & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

Por lo anterior

$$G(x,y) = \Phi(y-x) - \phi^x(y), \quad x, y \in \Omega, x \neq y.$$

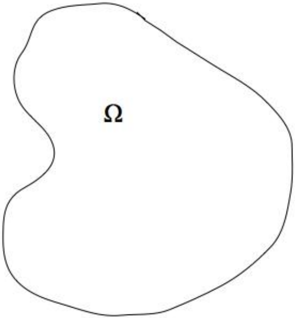
$$\begin{cases} -\Delta \phi^x = 0 & x \in \Omega \\ \phi^x = \Phi(y-x) & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

$$u(x) = -\int_{\partial\Omega} g(y) \frac{\partial G}{\partial \nu} + \int_{\Omega} f(y) G(x,y) dy$$

es solución.....

¿Cómo calcular ϕ^x para Ω general?

¿Cómo calcular ϕ^x para Ω general?



¡No se puede!

Necesitamos pensar en otra manera de resolver el problema, otro sentido de solución.

Recordatorio:Espacios métricos y normados

Un par (X,d), X es un conjunto y d una métrica definida en $X \times X$; i.e. $d: \; X \times X \to \mathbb{R}$ es tal que $\forall \; x, \; y, \; z \; \in X$ se satisface

(m1) $d \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

(m2) $d(x,y) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = y$

(m3) $d(x,y) = d(y,x)$

(m4) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ [desigualdad del triángulo]

- En $X = \mathbb{R}$, tenemos la métrica usual definida por $d(x, y) = |x - y|$

- En $X = \mathbb{R}$, tenemos la métrica usual definida por $d(x, y) = |x - y|$
- Para X un conjunto cualquiera, podemos definir la métrica discreta:

$$d(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{si } x = y \end{cases}$$

Recordatorio:Espacios métricos y normados

- En $X = \mathbb{R}$, tenemos la métrica usual definida por $d(x, y) = |x - y|$
- Para X un conjunto cualquiera, podemos definir la métrica discreta:

$$d(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{si } x = y \end{cases}$$

- Si (X_1, d_1) y (X_2, d_2) son espacios métricos la métrica producto d definida en $X_1 \times X_2$ está dada por

$$d((x_1, x_2); (y_1, y_2)) = \max\{d_1(x_1, y_1); d_2(x_2, y_2))\}$$

Se pueden usar otras métricas en $X_1 \times X_2$ por ejemplo:

$$d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2) \text{ o } [d_1(x_1, y_1)^2 + d_2(x_2, y_2)^2]^{\frac{1}{2}}$$

Recordatorio:Espacios métricos y normados

- En $X = \mathbb{R}$, tenemos la métrica usual definida por $d(x, y) = |x - y|$
- Para X un conjunto cualquiera, podemos definir la métrica discreta:

$$d(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{si } x = y \end{cases}$$

- Si (X_1, d_1) y (X_2, d_2) son espacios métricos la métrica producto d definida en $X_1 \times X_2$ está dada por

$$d((x_1, x_2); (y_1, y_2)) = \max\{d_1(x_1, y_1); d_2(x_2, y_2))\}$$

Se pueden usar otras métricas en $X_1 \times X_2$ por ejemplo:

$$d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2) \text{ o } [d_1(x_1, y_1)^2 + d_2(x_2, y_2)^2]^{\frac{1}{2}}$$

- En $X = \mathbb{R}^n$, tenemos la métrica euclidiana

$$d_2(x, y) = (\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Recordatorio:Espacios métricos y normados

- En $X = \mathbb{R}^n$, tenemos la métrica euclidiana
$$d_2(x,y) = (\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2)^{\frac{1}{2}}.$$
- Además, para todo número real $p \geq 1$ una métrica se define por
$$d_p(x,y) = (\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p)^{\frac{1}{p}}.$$
- $X = \{$sucesiones acotadas de números complejos$\}$, es decir, $x \in X$ si $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, ...), \xi_i \in \mathbb{C}$ y existe $C_x \in \mathbb{R}$ tal que $\forall\ i$, $|\xi_i| \leq C_x$. Si $x = \{\xi_i\}, y = \{\eta_i\} \in X$, definimos
$$d_\infty(x,y) = \sup_{j \in \mathbb{N}} |\xi_j - \eta_j|.$$

Recordatorio:Espacios métricos y normados

- Sea $X = \{x : [a, b] \to \mathbb{R}, x \text{ continua}\}$

$$d(x, y) = \max_{t\in[a,b]} \{|x(t) - y(t)|\}$$

- Espacio ℓ^p. Desigualdades de Hölder y de Minkowski.

  Sea $p \geq 1,\ p \in \mathbb{R}$,

$$\ell^p = \{x = (\xi_j), \xi_j \in \mathbb{C} \mid \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p < \infty\}$$

  Definimos en ℓ^p la métrica

$$d_p(x, y) = (\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i - \eta_i|^p)^{\frac{1}{p}}$$

Recordatorio:Espacios métricos y normados

Dado un espacio vectorial X, decimos que $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ es una norma si

i) $\|x\| \geq 0 \;\forall\, x \in X$

ii) $\|x\| = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0$ (semi norma si esto no sucede)

iii) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\| \;\forall\, \alpha \in K$

iv) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Una norma define una métrica

$$d(x, y) = \|x - y\| \text{ métrica inducida por la norma}$$

Recordatorio:Espacios métricos y normados

Ejemplos

- ℓ^p, $\|x\|_p = (\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p)^{\frac{1}{p}}$ $1 \leq p < \infty$. ℓ^∞, $\|x\|_\infty = \sup_{i \in \mathbb{N}} |\xi_i|$.
- $C[a, b]$; $\|x\| = \max_{[a,b]} |x(t)|$.
- S (funciones continuas en el intervalo $[0, 1]$) con la norma $\|x\| = \int_0^1 |x(t)| \, dt$,
- Sea X un espacio normado y M un espacio métrico no vacío.

$$C_B(M, X) = \{f \in C(M, X); \|f\|_\infty = \sup_{t \in M} \|f(t)\|_X < \infty\}$$

Recordatorio:Espacios métricos y normados

- Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n,\ \Omega \neq \emptyset\ n \geq 1$. Para $m \geq 0$ definimos $C_B^m(\Omega),\ f \in C^m(\Omega) = C^m(\Omega, \mathbb{R})$ o $C^m(\Omega, \mathbb{C})$ tales que

$$\|f\|_{m,\infty} = \max_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in \Omega} |D^\alpha f(x)| < \infty$$

con $D^\alpha f = (\frac{\partial}{\partial x_1})^{\alpha_1} \ldots (\frac{\partial}{\partial x_n})^{\alpha_n} f$ donde $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$. Se ve sin mucha dificultad que $\|\cdot\|_{m,\infty}$ es una norma.

Definición

Un espacio de Banach es un espacio vectorial normado completo, i.e., en el que toda sucesión de Cauchy converge.

Sean $(V, \|\cdot\|_V), (W, \|\cdot\|_W)$ espacios vectoriales normados sobre un mismo campo $\mathbb{K}$.

Definición

Decimos que $\Lambda : V \to W$ *es lineal si verifica, para todos* $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ *y todos* $x, y \in V$

$$\Lambda(\alpha x + \beta y) = \alpha\Lambda(x) + \beta\Lambda(y).$$

Operadores lineales

a) La identidad $I_X : X \to X$,

$$I_X(x) = x.$$

Operadores lineales

a) La identidad $I_X : X \to X$,

$$I_X(x) = x.$$

b) Diferenciación:

$$X = \{\text{polinomios definidos en } [0, 1]\}$$

Definimos

$$\Lambda(x)(t) = x'(t).$$

Claramente, $\Lambda : X \to X$.

Operadores lineales

a) La identidad $I_X : X \to X$,

$$I_X(x) = x.$$

b) Diferenciación:

$$X = \{\text{polinomios definidos en } [0, 1]\}$$

Definimos

$$\Lambda(x)(t) = x'(t).$$

Claramente, $\Lambda : X \to X$.

c) Integración: Sea $\mathcal{C}[a, b] = \{x : [a, b] \to \mathbb{R}, \text{ continuas }\}$. Definimos

$$T(x)(t) = \int_a^t x(s)ds.$$

Operadores lineales

a) La identidad $I_X : X \to X$,
$$I_X(x) = x.$$

b) Diferenciación:
$$X = \{\text{polinomios definidos en } [0,1]\}$$
Definimos
$$\Lambda(x)(t) = x'(t).$$
Claramente, $\Lambda : X \to X$.

c) Integración: Sea $\mathcal{C}[a,b] = \{x : [a,b] \to \mathbb{R},\ \text{continuas}\ \}$. Definimos
$$T(x)(t) = \int_a^t x(s)ds.$$

Definición

Diremos que un funcional Λ es acotado si la imagen de un conjunto acotado es siempre un conjunto acotado.

Cuando Λ es lineal se tiene que Λ es acotado si y sólo si la norma de Λ definida como

$$\|\Lambda\| = \sup\{\|\Lambda x\|_W, \|x\|_V < 1\}$$

es finita. De manera equivalente, Λ es acotado si existe $C \in [0, \infty)$ tal que

$$\|\Lambda x\|_W \leq C\|x\|_V \; \forall x \in V.$$

Diferenciación:

$$X = \{\text{polinomios definidos en } [0,1]\}$$

Definimos $\Lambda(x)(t) = x'(t)$ y en X la norma

$$\|x\|_\infty = \max_{t\in[0,1]} |x(t)|$$

tenemos que el operador no es acotado. En efecto tomamos la sucesión de "puntos" en X dada por $x_n(t) = t^n$. Entonces $\Lambda(x_n)(t) = nt^{n-1}$ y $\|\Lambda x_n\|_\infty = n$ por lo que no existe $C > 0$ tal que

$$\|\Lambda x_n\|_\infty \leq C\|x_n\|_\infty.$$

Teorema (Dimensión Finita)

Si un espacio normado X tiene dimensión finita, entonces todo operador lineal definido en X es acotado.

Teorema

Sea $T : X \to Y$ un operador lineal con X y Y espacios normados. Entonces

a) *T es continua $\Leftrightarrow$ T es acotado.*

b) *Si T es continuo en un único punto $\Rightarrow$ T es continuo.*

Prueba

a) Para $T = 0$ ✓

$\Leftarrow$) Sea $T \neq 0$. Entonces $\|T\| \neq 0$. Supongamos T acotado y $x_0 \in \mathcal{D}(T)$. Sea $\varepsilon > 0$, como T es lineal, $\forall x \in \mathcal{D}(T)$ tal que

$$\|x - x_0\| < \delta \quad \text{con} \quad \delta = \frac{\varepsilon}{\|T\|}$$

$$\|Tx - Tx_0\| = \|T(x - x_0)\| \leq \|T\| \, \|x - x_0\| \leq \|T\|\delta = \varepsilon$$

a) Para $T = 0$ ✓

$\Leftarrow$) Sea $T \neq 0$. Entonces $\|T\| \neq 0$. Supongamos T acotado y $x_0 \in \mathcal{D}(T)$. Sea $\varepsilon > 0$, como T es lineal, $\forall x \in \mathcal{D}(T)$ tal que

$$\|x - x_0\| < \delta \quad \text{con} \quad \delta = \frac{\varepsilon}{\|T\|}$$

$$\|Tx - Tx_0\| = \|T(x - x_0)\| \leq \|T\|\,\|x - x_0\| \leq \|T\|\delta = \varepsilon$$

b) Sea T continua en $x_0 \in X$, entonces dado $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que

$$\|Tx - Tx_0\| \leq \varepsilon \quad \forall x \in X \text{ tal que } \|x - x_0\| < \delta$$

Sea $y \neq 0$ en X.

Sea $0 < \delta' < \delta$, definimos

$$x = x_0 + \frac{\delta'}{\|y\|}y \quad \text{entonces} \quad x - x_0 = \frac{\delta'}{\|y\|}y$$

con lo que

Espacios de Hilbert

Un espacio X (sobre $\mathbb{R}$) con producto interior es un espacio vectorial sobre el campo de los reales donde está definida una operación binaria

$$(\cdot,\cdot) : X \times X \to \mathbb{R}$$

que satisface:

a) $(x+y,z) = (x,z) + (y,z)$ para todos $x,y,z \in X$
b) $(\alpha x, y) = \alpha(x,y)$ para todos $x,y \in X$ y $\alpha \in \mathbb{R}$
c) $(x,y) = (y,x)$, para todo $x,y \in X$
d) $(x,x) \geq 0$ para todo $x \in X$
e) $(x,x) = 0$ si y sólo si $x = 0$.

Se define una norma asociada al producto interior

$$\|x\| = \sqrt{(x,x)}$$

y una métrica asociada a ésta:

$$d(x,y) = \|x-y\|.$$

Definición

Diremos que un espacio vectorial con producto interior es un espacio de Hilbert si es completo con la norma inducida por su producto interior.

Ejemplos:

a) $\mathbb{R}^n$ con el producto interior habitual.

b) $\ell^2 = \{x = (x_n)_{n=1}^{\infty} | x_n \in \mathbb{R}$ una sucesión tal que $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty\}$.
Damos a este espacio vectorial el producto interior
$(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ donde $x = (x_n), y = (y_n)$.

En un espacio con producto interior X se satisface la identidad del paralelogramo, para toda $x, y \in X$ se tiene que

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

y se satisface la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$|(x, y)| \leq \|x\|\|y\|.$$

Sea H un espacio de Hilbert (sobre $\mathbb{R}$).

Definición

Definimos el espacio dual de H,

$$H' = \{f : H \to \mathbb{R}; f \text{ lineal y continua}\}.$$

Si $f \in H'$ denotamos para $x \in H$,

$$f(x) = < f, x >_{H',H}$$

o si no hay confusión simplemente $< f, x >$. A $< \cdot, \cdot >$ se le llama producto de dualidad.

Teorema

Para $f \in H'$, *definimos* $\|f\|_{H'} = \sup_{\|x\|=1} < f, x >$. *Tenemos:*

- $\|f\|_{H'} = \sup_{x \neq 0} \frac{<f,x>}{\|x\|_H} = \sup_{\|x\|_H \leq 1} < f, x >$ *es una norma en* H'.
- *El espacio vectorial* $(H', \| \cdot \|_{H'})$ *es un espacio vectorial normado completo.*

Teorema de representación de Riesz

Teorema

Sea H un espacio de Hilbert. Dada $\varphi \in H'$ existe un único $x \in H$ tal que:

$$< \varphi, y >= (x, y) \quad \forall y \in H.$$

Además

$$\|\varphi\|_{H'} = \|x\|_H.$$

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto Lebesgue medible,

Definición

$$\mathcal{L}^1(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R};\ \textit{medibles tal que } \int_\Omega |f(x)|dx < \infty\}.$$

En este conjunto consideramos la relación de equivalencia R sobre $\mathcal{L}^1$,

$$fRg \iff f = g \text{ c.t.p.}$$

Se prueba que efectivamente es una relación de equivalencia y se define

$$\boxed{L^1(\Omega) = \mathcal{L}^1/R}$$

Sea $p \in \mathbb{R}$ con $1 < p < \infty$.

Definición

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}, f \text{ medible y } |f|^p \in L^1(\Omega)\}$$

con la norma

$$\|f\|_p = \left[\int_\Omega |f(x)|^p dx\right]^{1/p}.$$

Ejercicio: demostrar que es una norma.

Definición

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}, f \textit{ medible y } \exists C > 0 : |f(x)| \leq C \textit{ c.t.p. en } \Omega\}$$

$$\|f\|_\infty = \text{ínf}\{C; |f(x)| \leq C \textit{ c.t.p. en } \Omega\}.$$

Dado $1 \leq p \leq \infty$ definimos su *exponente conjugado* p' como aquel que satisface

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Tenemos la desigualdad de Hölder:

Teorema

Dada $1 \leq p \leq \infty$, sea p' su exponente conjugado. Dados $f \in L^p(\Omega)$ y $g \in L^{p'}(\Omega)$, $fg \in L^1(\Omega)$ y se satisface la siguiente desigualdad:

$$\int_\Omega |f(x)g(x)|dx \leq \|f\|_p \|g\|_{p'} \tag{1}$$

Medida y $L^p(\Omega)$ III

Ω' está fuertemente contenido en Ω si $\overline{\Omega}'$ es compacto y $\overline{\Omega}' \subset \Omega$ y denotamos

$$\Omega' \subset\subset \Omega.$$

Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ y $1 \leq p \leq \infty$

Definición

$$L^p_{loc}(\Omega) = \{v \in L^p(\Omega') \, \forall \Omega' \subset\subset \Omega\}.$$