Os 5 sólidos platônicos e a busca pelo número de retas numa superfície projetiva

Jacqueline Rojas (UFPB)
Sally Andria (UFF)

Verão UFPB

O problema

Queremos estudar com um pouco mais de detalhe o problema

> "A quantidade máxima de retas que uma superfície não singular de grau d em $\mathbb{P}^3$ contém."

Já vimos:

- $d = 1$: Plano contém um número infinito de retas;
- $d = 2$: Todas as quádricas (inclusive a não singular) contém um número infinito de retas;
- $d = 3$: Toda cúbica não singular tem exatamente 27 retas;
- $d = 4$: Quárticas suaves pode conter nenhuma ou no máximo 64 retas;
- $d = 5$: Quínticas suaves podem não conter retas, mas se contiver, este númeo é $\leqslant 127$;
- $d \geqslant 6$: A menor cota conhecida para $d \geqslant 6$

$$N_d \leqslant 11d^2 - 30d + 18.$$

Na próxima semana

Nos basearemos no artigo de Boissière e Sarti intitulado

"Counting lines on surfaces",

para estudar uma família de superfícies não singulares, e observar como este estudo nos ajuda a encontrar cotas para N_d.

Samuel Boissière

Alessandra Sarti

Sobre a família de curvas

Estudaremos uma família de curvas dada por zeros de polinômios homogêneos de grau d obtidos a partir de um conjunto de d pontos em $\mathbb{P}^1$.

A contagem de retas nesse caso se deve, em parte, a um estudo do grupo dos automorfismos de $\mathbb{P}^1$ e um famoso teorema: Teorema de Classificação de Klein (**TCK**).

E onde entram os sólidos platônicos?
Os grupos de simetria dos sólidos platônicos reaparecem no teorema de Classificação dos Subgrupos finitos de $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C}) = Aut(\mathbb{P}^1)$ (o TCK).

Teorema de classificação de Klein (**TCK**)

Um subgrupo finito de $Aut(\mathbb{P}^1)$ é isomorfo a exatamente um dos seguintes grupos:

(i) C_m o grupo cíclico de ordem m;

(ii) D_m o grupo diedral de ordem $2m$, $m \geq 2$;

(iii) A_4 o grupo alternado de ordem 12;

(iv) S_4 o grupo das permutações de ordem 24;

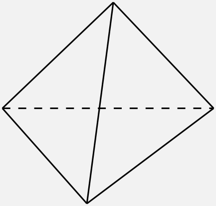
(v) A_5 o grupo alternado de ordem 60.

Se dois subgrupos de $Aut(\mathbb{P}^1) = \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ forem isomorfos, então eles são conjugados.

Resumindo

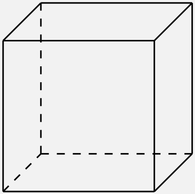
Da primeira aula

Vimos os grupos de simetria e os grupo de simetrias por rotações sólidos platônicos. Lembre-se, sólidos duais tem mesmos grupos!



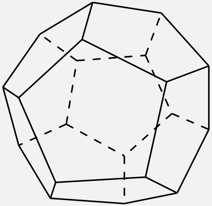
Tetraedro

$S(\mathrm{X}) \cong S_4$
$R(\mathrm{X}) \cong A_4$



Hexaedro
(Octaedro)

$S(\mathrm{X}) \cong S_4 \times C_2$
$R(\mathrm{X}) \cong S_4$



Dodecaedro
(Icosaedro)

$S(\mathrm{X}) \cong A_5 \times C_2$
$R(\mathrm{X}) \cong A_5$

Rotações em $\mathbb{R}^3$

Ao estudarmos as rotações no espaço 3-dimensional, vemos que os grupos de simetria dos sólidos platônicos reaparecem na classificação dos subgrupos finitos de $R(\mathbb{R}^3)$.

Um subgrupo finito de $R(\mathbb{R}^3)$ é isomorfo a exatamente um dos seguintes grupos:

- O Grupo cíclico C_m;
- O grupo diedral D_m de ordem $2m$, $m \geq 2$;
- E o grupo de simetrias por rotações de um dos sólidos platônicos.

Classificação dos subgrupos finitos de $R(\mathbb{R}^3)$ e TCK

Há uma semelhança entre a classificação dos subgrupos finitos de $R(\mathbb{R}^3)$ e o Teorema de classificação de Klein.

Existe uma conexão entre o grupo $R(\mathbb{R}^3)$ e o grupo projetivo linear $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ via o grupo $\mathrm{SU}(2)$, definidos a seguir.

Relembre/Aprenda

Sejam G um grupo e H um subgrupo de G.

Classe lateral de H em G

Para todo $g \in G$, definimos as classes laterais à esquerda e à direita de H :

$$gH = \{gh \mid h \in H\} \quad \text{e} \quad Hg = \{hg \mid h \in H\}.$$

Exemplo/Exercício: $S_3 = \{id, (23), (13), (12), (132), (123)\}$, e seja $H = \{id, (132), (123)\}$. H tem duas classes à esquerda:

- $H = idH = (123)H = (132)H$;
- $\{(23), (13), (12)\} = (23)H = (13)H = (12)H$.

Relembre/Aprenda

Subrupo normal

$H \subset G$ é *subgrupo normal* se

$$\forall \ h \in H, \ g \in G \quad \text{tal que} \quad ghg^{-1} = h.$$

Ou seja, para todo elemento $g \in G$, tem-se $gH = Hg$.

Se H é um subgrupo normal de G, então o quociente G/H admite uma estrutura de grupo, chamada de *grupo quociente*.

Exemplo: Vimos na primeira aula o grupo quociente $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. De fato, $2\mathbb{Z}$ é subgrupo normal de $\mathbb{Z}$.

Voltando à conexão

O grupo $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ é *grupo projetivo linear* associado ao espaço vetorial complexo $\mathbb{C}^2$ e $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C}) = \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})/\mathrm{E}_2(\mathbb{C})$, no qual:

$$\mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \;\middle|\; \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C} \text{ e } \alpha\delta - \gamma\beta \neq 0 \right\},$$

$$\mathrm{E}_2(\mathbb{C}) = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \;\middle|\; \alpha \in \mathbb{C} \right\}.$$

Quem são $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ e $\mathrm{SU}(2)$, mesmo?

Já o grupo $\mathrm{SU}(2)$ é o subgrupo de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ denominado *grupo unitário especial*:

$$\mathrm{SU}(2) = \left\{ \begin{bmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{bmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \;\middle|\; |z|^2 + |w|^2 = 1 \right\},$$

Lembre-se: se $z = a + bi$, o seu conjugado é $\overline{z} = a - bi$ e $|z|^2 = \overline{z}z = a^2 + b^2$.

Os grupos $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$, $\mathrm{SU}(2)$ e rotações em $\mathbb{R}^3$

Sejam $z = a + bi$, $w = c + di$ e $\mathrm{q} = (b, c, d) \in \mathbb{R}^3$.
Considere $A = \begin{bmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{bmatrix} \in \mathrm{SU}(2)$.

É possível definir uma transformação linear $R_A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$\mathrm{v} \longmapsto (a^2 - ||\mathrm{q}||^2)\mathrm{v} + 2(\mathrm{q} \cdot \mathrm{v})\mathrm{q} + (2a)\mathrm{q} \times \mathrm{v}$$

no qual "$\cdot$" é o produto interno usual e "$\times$" é o produto vetorial em $\mathbb{R}^3$.

Os grupos $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$, $\mathrm{SU}(2)$ e rotações em $\mathbb{R}^3$

Vamos olhar com mais deltalhes para a transformação R_A.

- Se q é o vetor nulo, então R_A é a função identidade.
- Se $\mathrm{q} \neq 0$ e $\theta \in [0, 2\pi]$, tal que $a = \cos\dfrac{\theta}{2}$ e $\mathrm{u} = \dfrac{\mathrm{q}}{||\mathrm{q}||}$ seja vetor unitário, temos que R_A é uma rotação no ângulo θ e eixo de rotação (contendo a origem) determinado pelo vetor diretor u.

Ou seja, R_A é um elemento do grupo das rotações em $\mathbb{R}^3$.

Os grupos $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$, $\mathrm{SU}(2)$ e rotações em $\mathbb{R}^3$

Observe que $R : \mathrm{SU}(2) \longrightarrow R(\mathbb{R}^3)$ dada por $A \longmapsto R_A$ é um homomorfismo sobrejetivo de grupos tendo por núcleo $\{\pm \mathrm{Id}\}$.

Pelo teorema do isomorfismo, o grupo quociente $\mathrm{SU}(2)/\{\pm \mathrm{Id}\}$, que denotado por $\mathrm{PSU}(2)$, é isomorfo ao grupo $R(\mathbb{R}^3)$.

Os grupos $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$, $\mathrm{SU}(2)$ e rotações em $\mathbb{R}^3$

Fatos importantes:

- $\mathrm{PSU}(2)$ é subgrupo de $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$.
- Todo subgrupo finito de $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ é conjugado a um subgrupo de $\mathrm{PSU}(2)$.
- Como $R(\mathbb{R}^3) \cong \mathrm{PSU}(2)$, os subgrupos finitos de $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ irão se identificar com conjugados de subgrupos de $R(\mathbb{R}^3)$.

Conjugação

Seja G um grupo. Dois subgrupos H_1 e H_2 de G são ditos *conjugados*, se existe $g \in G$ tal que $H_2 = gH_1g^{-1}$ sendo

$$gH_1g^{-1} = \{g * h * g^{-1} \in G \mid h \in H_1\}.$$

Da segunda aula

Lembre que $\mathbb{P}^1$, a reta projetiva sobre $\mathbb{C}$, é formada por todos os subespaços de dimensão um de $\mathbb{C}^2$.

Nós escrevemos:

$$\mathbb{P}^1 = \{[c:1] \mid c \in \mathbb{C}\} \cup \{[1:0]\}.$$

E denotamos $\infty = [1:0]$ e $a = [a:1]$, com $a \in \mathbb{C}$.

Lembre:

Um ponto $[a:b] \in \mathbb{P}^1$ denota o subespaço gerado por (a,b).

Automorfismos em $\mathbb{P}^1$

Começaremos recordando/definindo que $\mathbf{T} : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ é um automorfismo se existe um isomorfismo $\mathbb{C}$–linear $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ tal que $\mathbf{T}([v]) = [T(v)]$.

Denotaremos:

$$Aut(\mathbb{P}^1) = \{\mathbf{T} : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1 \mid \mathbf{T} \text{ é automorfismo}\}.$$

E observamos que

$$\mathbf{T}([X : Y]) = [\alpha X + \beta Y : \gamma X + \delta Y]$$

com $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$ tais que $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$.

A seguir estudaremos algumas propriedades dos elementos de $Aut(\mathbb{P}^1)$.

Propriedades dos elementos de $Aut(\mathbb{P}^1)$

Exercício:

Lemma

Seja $\mathbf{T} \in Aut(\mathbb{P}^1)$ *tal que* $\mathbf{T}(\infty) = \infty$, $\mathbf{T}(0) = 0$ *e* $\mathbf{T}(1) = 1$, *então* $\mathbf{T}$ *é o automorfismo identidade em* $\mathbb{P}^1$.

Além disso, pode se provar também a seguinte:

Proposição

Sejam $P_i = [a_i : b_i]$ $(i = 1, 2, 3)$ *pontos, dois a dois distintos, na reta projetiva. Então existe um único automorfismo* $\phi : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ *tal que*

$$\phi(P_1) = \infty, \ \phi(P_2) = 0, \ \phi(P_3) = 1.$$

Propriedades dos elementos de $Aut(\mathbb{P}^1)$

Corollary

Sejam $\{P_1, P_2, P_3\}$ *e* $\{Q_1, Q_2, Q_3\}$ *subconjuntos de pontos dois a dois distintos em* $\mathbb{P}^1$. *Então existe um único automorfismo* $\mathbf{T} : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ *tal que*

$$\mathbf{T}(P_i) = Q_i, \; i = 1, 2, 3.$$

Propriedades dos elementos de $Aut(\mathbb{P}^1)$

Lemma

Seja $\mathbf{T} \in Aut(\mathbb{P}^1)$, *com* $\mathbf{T} \neq \mathbf{Id}_{\mathbb{P}^1}$. *Então* $\mathbf{T}$ *possui sempre pelo menos um ponto fixo e pode ter no máximo 2 pontos fixos.*

Corollary

Se $\mathbf{T} \in Aut(\mathbb{P}^1)$ *é diferente da identidade de ordem finita, então* $\mathbf{T}$ *possui exatamente dois pontos fixos diferentes.*

A chave

Quando analisarmos a família de superfícies em $\mathbb{P}^3$, poderemos enxergar o conjunto de zeros em $\mathbb{P}^1$ de um polinômio homogêneo em duas variáveis que compõe o polinômio homogêneo das nossas superfícies.

Sendo este conjunto C formado por d pontos na reta projetiva, o conjunto

$$\Gamma_C = \left\{ \mathbf{T} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1) \mid \mathbf{T}(C) = C \right\}$$

é um subgrupo de $Aut(\mathbb{P}^1)$ de ordem finita para $|C| \geq 3$.

Muito obrigada, e....

Nos vemos na semana que vem!!!