Os 5 sólidos platônicos e a busca pelo número de retas numa superfície projetiva

Jacqueline Rojas (UFPB)
Sally Andria (UFF)

Verão UFPB

O problema

Estamos interessados em responder a seguinte questão

"Qual é a quantidade máxima de retas que uma superfície não singular de grau d em $\mathbb{P}^3$ contém?"

O espaço projetivo

O n–espaço projetivo complexo $\mathbb{P}^n$ é o conjunto de todos os subespaços de dimensão 1 do espaço vetorial complexo $\mathbb{C}^{n+1}$.

Os pontos de $\mathbb{P}^n$ serão as retas em $\mathbb{C}^{n+1}$ que passam pela origem!

Ou seja, um ponto em $\mathbb{P}^n$ é da forma $[\mathrm{v}]$, com v vetor não nulo em $\mathbb{C}^{n+1}$. Para $\mathrm{v} = (v_0, ..., v_n)$, denotaremos $[\mathrm{v}] = [v_0 : ... : v_n]$ e denominamos v_0,...,v_n por coordenadas homogêneas do ponto $[\mathrm{v}]$.

Observe que,

$$[a_0 : ... : a_n] = [b_0 : ... : b_n] \Leftrightarrow (a_0, ..., a_n) = \lambda(b_0, ..., b_n)$$

para algum $\lambda \in \mathbb{C}$ não nulo. Logo, pontos distintos são determinados por vetores LI.

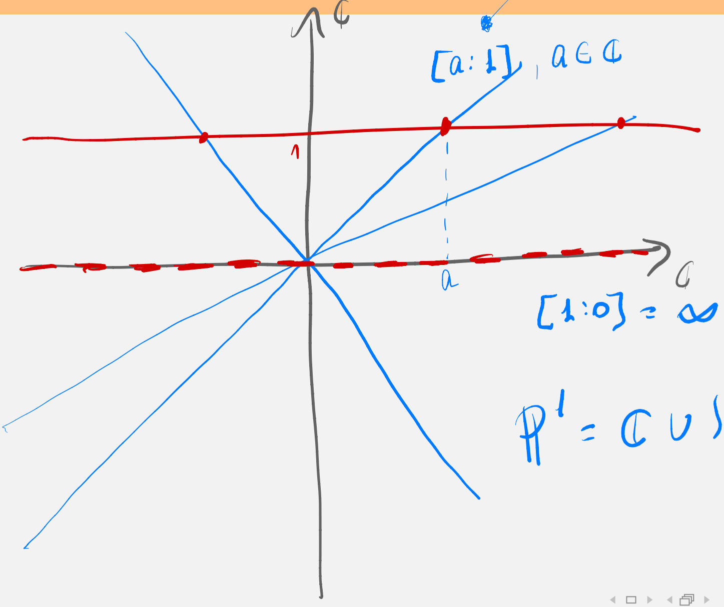
Segue a intuição!

Assim como tínhamos com $\mathbb{R}^n$, o objetos $\mathbb{P}^1$, $\mathbb{P}^2$ e $\mathbb{P}^3$ são denominados de *reta projetiva*, *plano projetivo* e *espaço projetivo*, respectivamente.

Será que a gente consegue enxergar?
Só precisamos ser cuidadosos com as definições, e lembrar que estamos sempre numa dimensão a mais, enxergando uma dimensão a menos.
Calma que eu te explico!

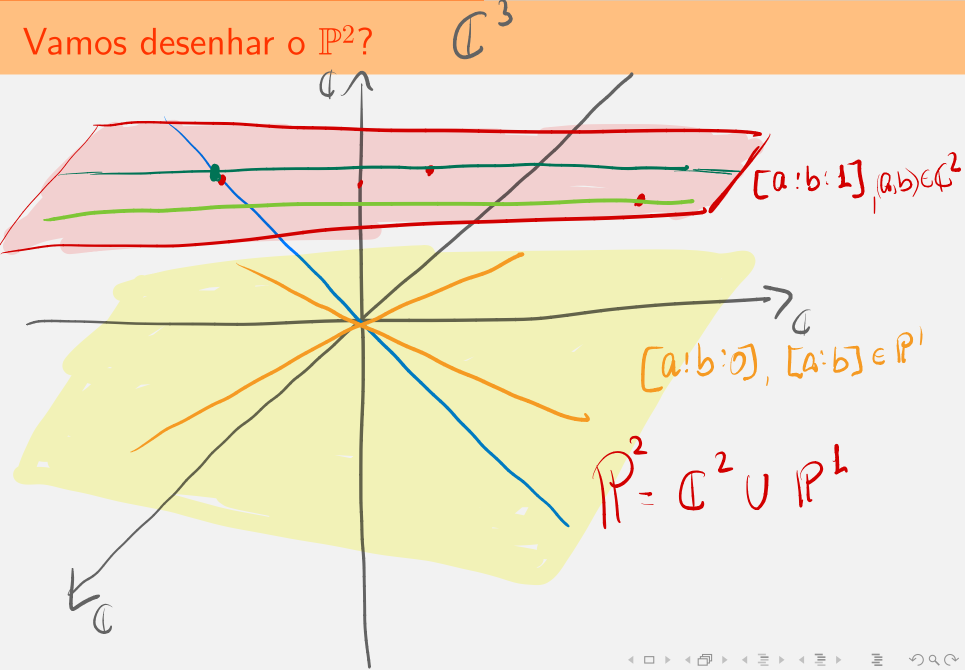
Vamos desenhar o $\mathbb{P}^1$?

$\mathbb{C}^2$



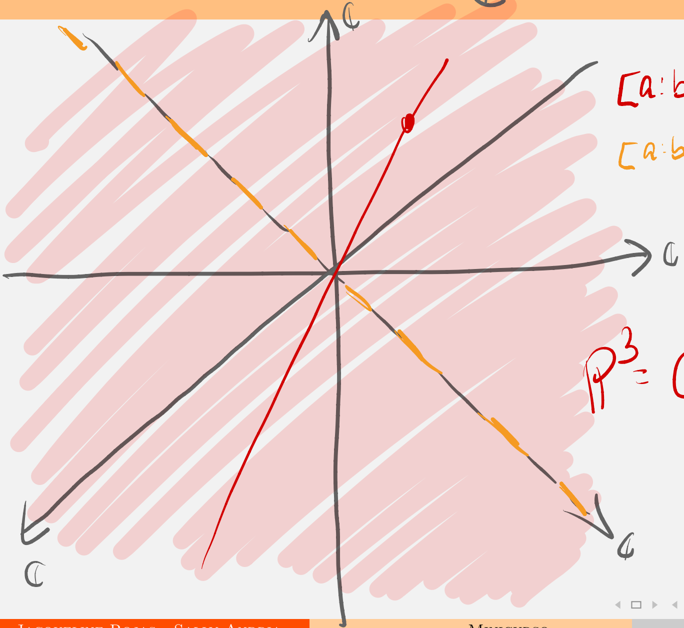
$$\mathbb{P}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

Vamos desenhar o $\mathbb{P}^2$?



Vamos desenhar o $\mathbb{P}^3$?

$\mathbb{C}^4$



$[a:b:c:1]$, $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$

$[a:b:c:0]$,

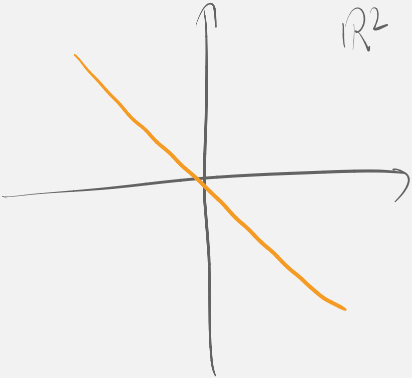
$[a:b:c] \in \mathbb{P}^2$

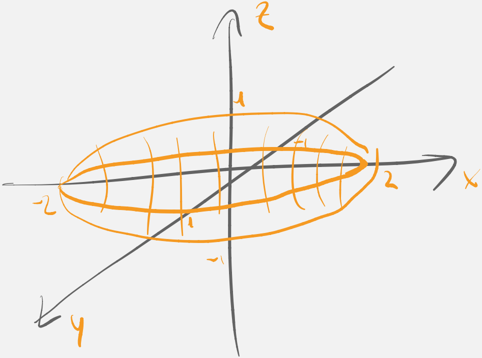
$\mathbb{P}^3 = \mathbb{C}^3 \cup \mathbb{P}^2$

Desenhando nos espaços projetivos

Nos espaços reais $\mathbb{R}^n$, olhamos para zeros de equações polinomiais para desenharmos nele. Por exemplo:

- $x + y = 0$ define uma reta pela origem em $\mathbb{R}^2$;
- $x^2 + 2y^2 + 4z^2 - 4 = 0$ define um elipsóide em $\mathbb{R}^3$.





Desenhando nos espaços projetivos

Retas e superfícies em $\mathbb{P}^n$ também são definidos a partir dos zeros de polinômios, só que tais polinômios são especiais, eles precisam ser homogêneos.

Polinômio homogêneo

$f \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ não nulo é *homogêneo de grau* $d \geq 0$ se

$$f(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) = \lambda^d f(x_0, \dots, x_n), \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Note que todos os monômios de f têm grau d.

$X^2 y + Z = 0$

$(\lambda x)^2 (\lambda y) + \lambda Z = 0$

$\lambda^3 xy + \lambda Z$

$X^2 y + 3Z^3 - 5yz^2 = 0 \leftarrow d = 3$

$(\lambda x)^2 (\lambda y) + 3(\lambda z)^3 - 5(\lambda y)(\lambda z)^2 = 0$

$\lambda^3 xy + 3\lambda^3 z^3 - 5\lambda^3 yz^2 = 0$

Zeros de polinômios homogêneos

A homogeneidade de f garante a definição de $\mathcal{Z}(f)$!

$f(\lambda v) = \lambda^d f(v)$ $\quad$ $\underline{[v] \in \mathcal{Z}(f)} \Rightarrow f(\lambda v) = \lambda^d f(v) = \lambda^d \cdot 0 = 0$

- $f = 0$, então $\mathcal{Z}(0) = \mathbb{P}^n$;
- $f = c$, $c \in \mathbb{C}$, então $\mathcal{Z}(c) = \varnothing$;
- $f \in \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n]$ homogêneo e não constante, então o *conjunto dos zeros* de f
$$\mathcal{Z}(f) = \left\{ [\mathrm{v}] \in \mathbb{P}^n \;\middle|\; f(\mathrm{v}) = 0 \right\}$$
- Se $f_1, f_2, \ldots, f_k \in \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n]$ são homogêneos e não constantes (não necessariamente do mesmo grau), então
$$\mathcal{Z}(f_1, f_2, \ldots, f_k) = \bigcap_{i=1}^{k} \mathcal{Z}(f_i).$$

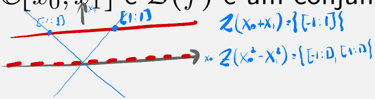
Ainda sobre os zeros de polinômios

Seja $f \in \mathbb{C}[x_0, ..., x_n]$ polinômio homogêneo.

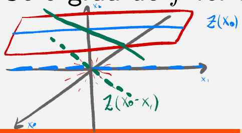
> $\mathcal{Z}(f)$ é denominada *hipersuperfície* definida por f em $\mathbb{P}^n$.

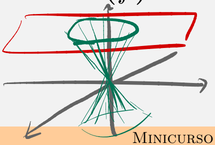
De fato, para

- $n = 1$: $f \in \mathbb{C}[x_0, x_1]$ e $\mathcal{Z}(f)$ é um conjunto finito de pontos na reta projetiva.



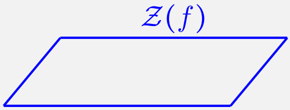
- $n = 2$: $f \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$ e $\mathcal{Z}(f)$ é dita *curva projetiva plana*.
  Se o grau de f for 1, então $\mathcal{Z}(f)$ é uma *reta* no plano projetivo $\mathbb{P}^2$.



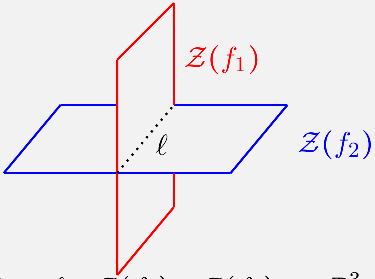


Ainda sobre os zeros de polinômios

- $n = 3$: $f \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3]$ e $\mathcal{Z}(f)$ é dita *superfície projetiva*.
  Se f for homogêneo de grau 1, $\mathcal{Z}(f)$ é um *plano* em $\mathbb{P}^3$.
  Uma *reta* em $\mathbb{P}^3$ é dada pela interseção de planos distintos, i.e. $\mathcal{Z}(f_1)$ e $\mathcal{Z}(f_2)$ com f_1 e f_2 LI.



Plano em $\mathbb{P}^3$



Reta $\ell = \mathcal{Z}(f_1) \cap \mathcal{Z}(f_2)$ em $\mathbb{P}^3$

Pontos especiais

Ponto singular de $\mathbb{Z}(f)$

Seja $f \in \mathbb{C}[x_0, ..., x_n]$ homogêneo de grau $d \geq 1$.
Um ponto $[\mathrm{v}] \in \mathbb{P}^n$ é dito de *ponto singular de* $\mathbb{Z}(f)$ se as derivadas parciais de f em relação às variáveis x_i são nulas:

$$\partial_i f(\mathrm{v}) = 0, \ i \in \{0, ..., n\}.$$

Exercício: Pode se verificar que os pontos singulares são zeros de f.

O $\mathbb{Z}(f)$ é *não singular* se não possuir pontos singulares.

Por exemplo, todo plano em $\mathbb{P}^3$ é não singular.

$X_0 + X_1 \quad X_2$

Finalmente, as nossas superfícies

Superfície não singular de grau d em $\mathbb{P}^3$

Seja $f \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3]$ homogêneo de grau $d \geq 1$.
$\mathbb{Z}(f)$ é dita *superfície não singular de grau d* se $\mathbb{Z}(f) \subset \mathbb{P}^3$ é não singular.

Quando $d = 2, 3, 4$, também usamos os termos superfície quádrica, cúbica, quártica, respectivamente.

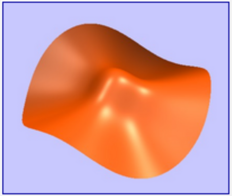


Figure: Superfície de Fermat

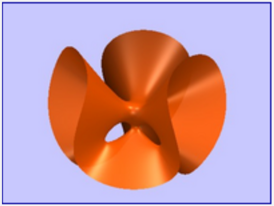


Figure: Superfície de Clebsch

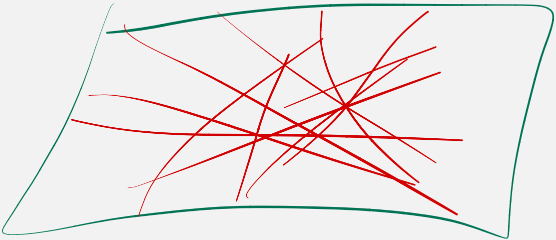
Retas num plano ($d = 1$)

Seja $\mathcal{Z}(F)$, com F não nulo, homogêneo de grau 1, um plano.

Seja $[F, L_1, L_2, L_3]$ uma base para os polinômios homogêneos de grau 1.

Então podemos definir

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^2 & \twoheadrightarrow & \{\text{ retas contidas em } \mathcal{Z}(F)\} \\ [a:b:c] & \mapsto & \mathcal{Z}(F, aL_1 + bL_2 + cL_3) \end{array}$$



Retas em superfícies quádricas ($d = 2$)

Uma superfície quádrica em $\mathbb{P}^3$ é definida por $\mathcal{Z}(F)$ com F não nulo, homogêneo de grau 2.

Corolário (Classificação das quádricas em $\mathbb{P}^3$)

Uma superfície quádrica em $\mathbb{P}^3$ é definida por um polinômio que assume uma das seguintes formas:

(i) $F_1 = X^2$

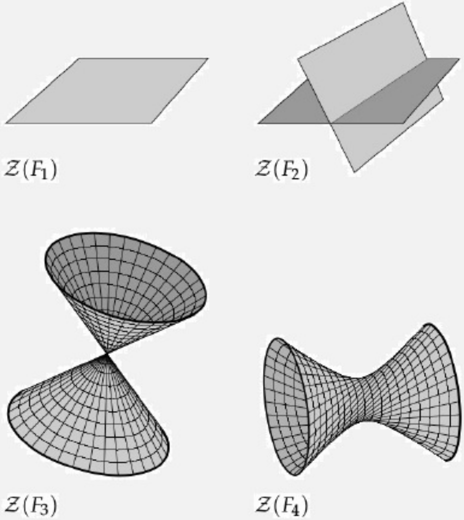
(ii) $F_2 = X^2 + Y^2$

(iii) $F_3 = X^2 + Y^2 + Z^2$

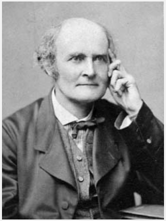
(iv) $F_4 = X^2 + Y^2 + Z^2 + W^2$

Além disso, toda quádrica não singular é equivalente a $\mathcal{Z}(F_4)$.

Retas em superfícies quádricas ($d = 2$)



Retas em superfícies cúbicas $(d = 3)$



Arthur Cayley 1821 - 1895

George Salmon 1819 - 1904

Cayley, em 1847, enviou uma carta para Salmon na qual mencionava que uma superfície cúbica deveria conter um número finito de retas.

Em 1849, Cayley apresenta a demonstração de Salmon, no artigo

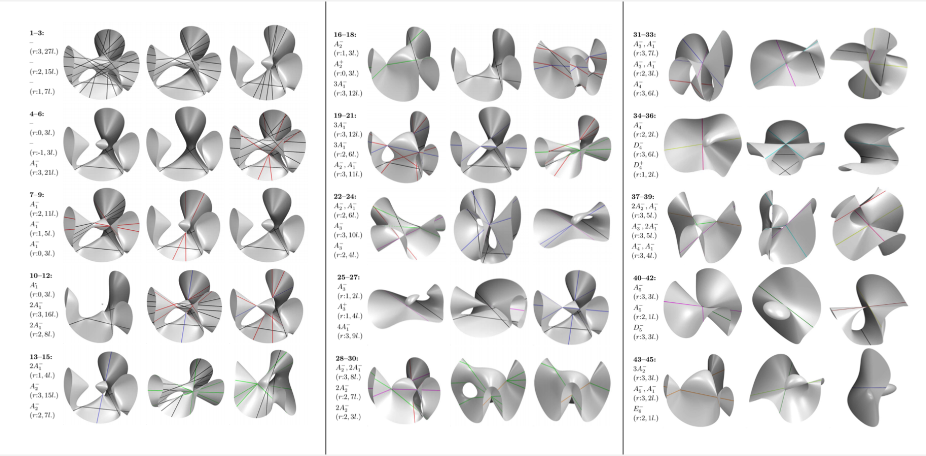
"On the triple tangent planes of surfaces of the third order",

para o seguinte

Teorema

Toda superfície cúbica não singular em $\mathbb{P}^3$ contém exatamente 27 retas.

Retas em superfícies cúbicas ($d = 3$)

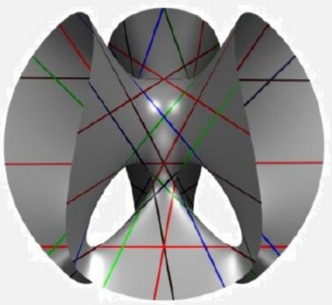


Retas em superfícies cúbicas ($d = 3$)

Clebsch e sua cúbica que contém exatamente 27 retas:

$$\mathcal{Z}\left(X^3 + Y^3 + Z^3 + W^3 - (X + Y + Z + W)^3\right).$$

Alfred Clebsch 1833 - 1872



Retas em superfícies cúbicas ($d = 3$)

Outra cúbica famosa é a apresentada por Cayley,

$$\mathcal{Z}\big(4(X^3 + Y^3 + Z^3 + W^3) - (X + Y + Z + W)^3\big),$$

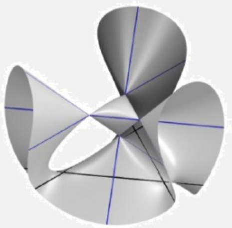


Figure: A Cúbica de Cayley e suas 9 retas.

Retas em superfícies de grau $d \geqslant 4$

O *Teorema da Dimensão das Fibras* garante que para grau $d \geqslant 4$ existem superfícies de grau d no espaço projetivo que não contêm nenhuma reta.

Por exemplo, as superfícies dadas pela equação

$$\mathcal{Z}\big(W^d + XY^{d-1} + YZ^{d-1} + ZW^{d-1}\big)$$

são não singulares e não contêm nenhuma reta para $d \geqslant 4$.

Retas em superfícies quárticas ($d = 4$)

Em 1882, Schur apresentou a superfície quártica

$$\mathcal{Z}(X^4 + XY^3 + Z^4 + ZW^3)$$

que contém exatamente 64 retas.

Mas foi só em 1943 que Segre provou no artigo *"The maximum number of lines lying on a quartic surface"* o seguinte

Teorema

Toda superfície quártica não singular em $\mathbb{P}^3$ contém no máximo 64 retas.

Friedrich Schur 1856 - 1932

Beniamino Segre 1903 - 1977

Retas em superfícies quárticas ($d = 4$)

No mesmo artigo, Segre conjecturou uma cota para o número máximo de retas N_d que uma superfície não singular de grau d, em $\mathbb{P}^3$ pode conter:

$$N_d \leqslant (d-2)(11d-6).$$

Retas em superfícies quárticas ($d = 4$)

Slawoir Rams

Matthias Shütt

Em 2015, estes matemáticos publicaram o artigo

"64 Lines on smooth quartic surfaces",

onde revelam que, em seu trabalho, Segre considerava uma afirmação que estava equivocada.

Superfícies de grau $d \geqslant 5$

Até o momento, o número máximo N_d de retas contidas numa superfície suave de grau $d \geqslant 5$ é desconhecido.

Algumas cotas para estes números têm sido encontradas estudando certas famílias, ou novos pontos de vista de superfícies no espaço projetivo.

Superfícies de grau $d \geqslant 5$

- 2019: Slawomir Rams e Matthias Shütt provaram para quínticas suaves a cota
$$N_5 \leqslant 127.$$
Artigo *"Counting lines on surfaces, especially quintics"*.

Vimos que a melhor cota N_5 era a de Segre
$$N_5 \leqslant (5-2)(11 \cdot 5 - 6) = 147.$$

- 2020: Slawomir Rams e Thomas Bauer encontraram uma nova cota para o número N_d, e é a menor cota conhecida para $d \geqslant 6$
$$N_d \leqslant 11d^2 - 30d + 18.$$
Artigo *"Counting lines on projective surfaces"*.