Os 5 sólidos platônicos e a busca pelo número de retas numa superfície projetiva

Jacqueline Rojas (UFPB)
Sally Andria (UFF)

Verão UFPB

Sólidos Platônicos

Um *Sólido Platônico* é um poliedro convexo com duas exigências.

Poliedro: é um sólido limitado por polígonos;
Convexo: qualquer reta secante possui exatamente dois pontos em comum com o poliedro.

- todas suas faces são polígonos regulares iguais;
- e em todos os seus vértices encontram-se o mesmo número de arestas.

Sólidos Platônicos

Um *Sólido Platônico* é um poliedro convexo com duas exigências.

Poliedro: é um sólido limitado por polígonos;
Convexo: qualquer reta secante possui exatamente dois pontos em comum com o poliedro.

- todas suas faces são polígonos regulares iguais;
- e em todos os seus vértices encontram-se o mesmo número de arestas.

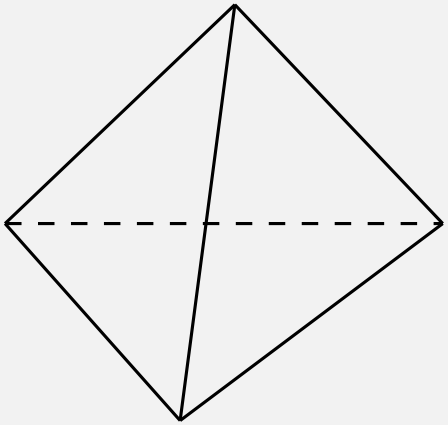
Sólidos Platônicos

Um *Sólido Platônico* é um poliedro convexo com duas exigências.

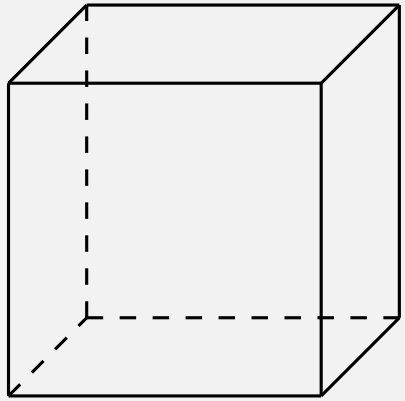
Poliedro: é um sólido limitado por polígonos;
Convexo: qualquer reta secante possui exatamente dois pontos em comum com o poliedro.

- todas suas faces são polígonos regulares iguais;
- e em todos os seus vértices encontram-se o mesmo número de arestas.

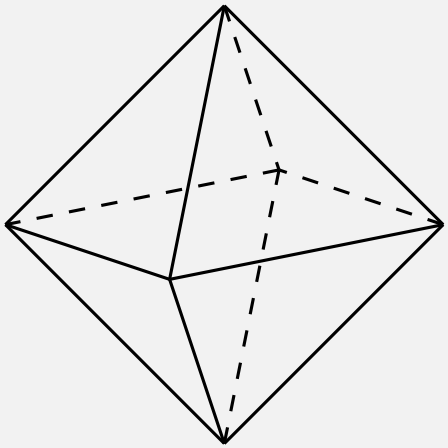
Sólidos Platônicos



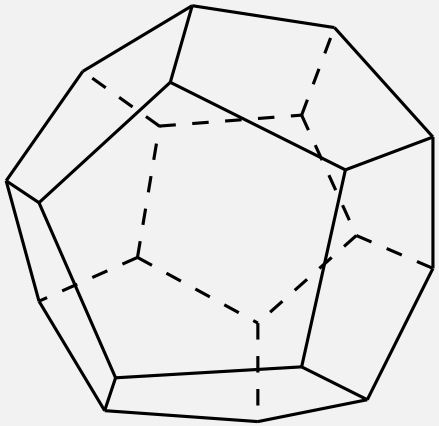
Tetraedro



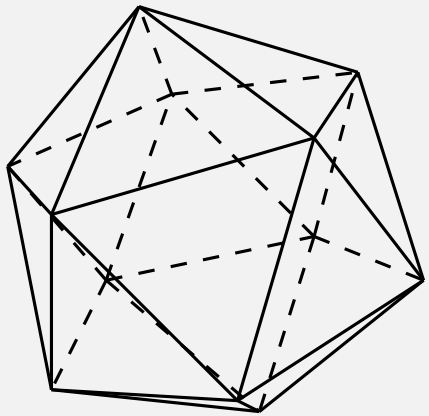
Hexaedro (Cubo)



Octaedro



Dodecaedro



Icosaedro

Os Sólidos no dia a dia

Existem formas cristalinas naturais:

Figure: Calcopirita (Tetraedro), Galena (Hexaedro), Magnetita (Octaedro).

Os Sólidos no dia a dia

Protozoários amebóides encontrados por Ernst Haeckel em 1904.

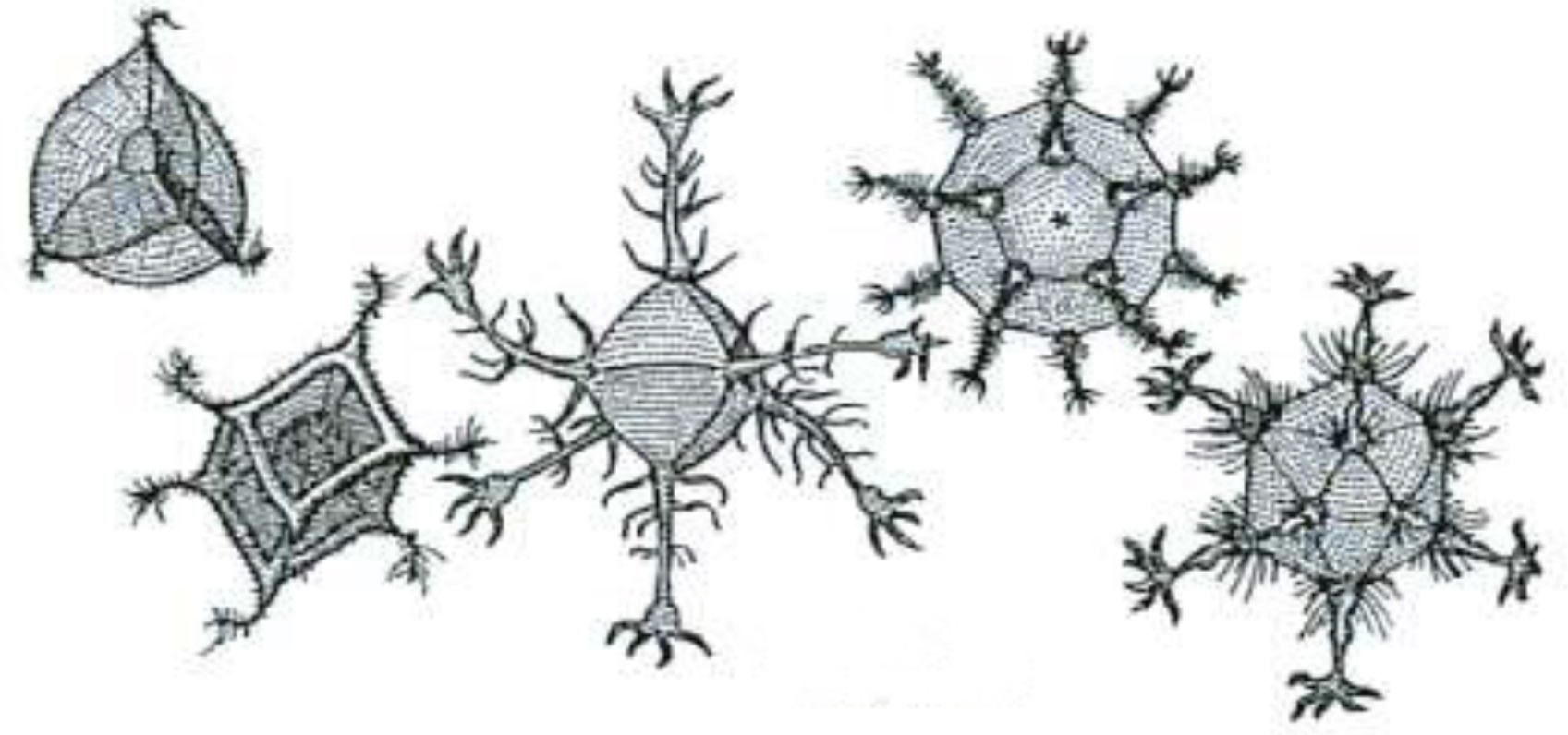


Figure: Radiolários: *Callimitra agnesae, Lithocubus geometricus, Circoporus octahedrus, Circorrhegma dodecahedrus, Circognia icosahedrus*.

Os Sólidos no dia a dia

Na arquitetura: doma geodésica a partir de poliedros regulares platônicos com faces triangulares.

Figure: Casa cor Jardim Botânico do Recife-PE.

Números notáveis nos Sólidos Platônicos

Sólido Platônico	Número de faces	Número de vértices	Número de arestas	Número de arestas por face
Tetraedro	4	4	6	3
Cubo	6	8	12	4
Octaedro	8	6	12	3
Dodecaedro	12	20	30	5
Icosaedro	20	12	30	3

Dualidade dos Sólidos Platônicos

Considere o centro de cada face, e conecte com segmentos os centros de faces vizinhas.
Desta maneira, construimos um Sólido Platônico dual.

Dualidade dos Sólidos Platônicos

Considere o centro de cada face, e conecte com segmentos os centros de faces vizinhas.
Desta maneira, construimos um Sólido Platônico dual.

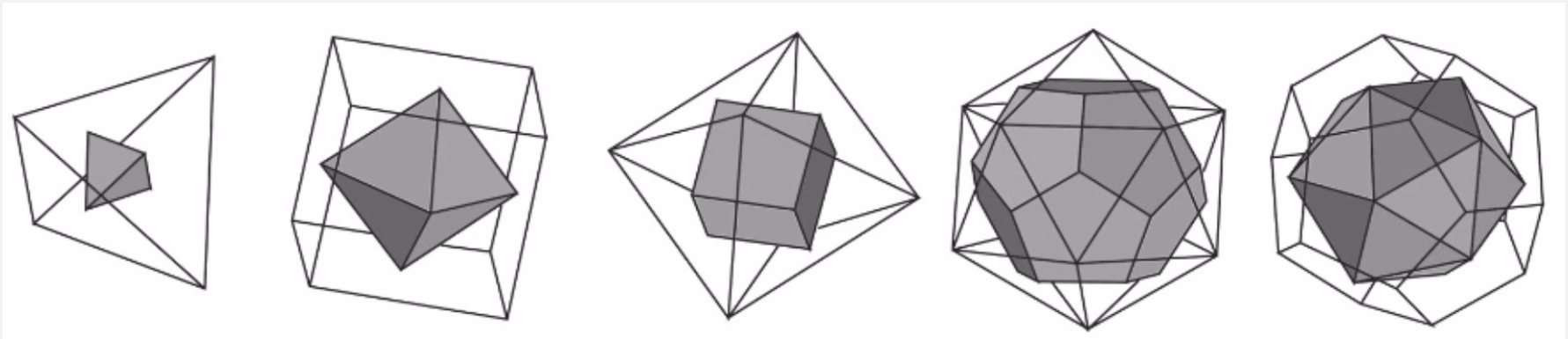


Figure: Poliedro dual de cada sólido Platônico.

Grupos de simetria dos Sólidos Platônicos

Imagine que escolhamos um dos sólidos e o fixemos no espaço.

Se quiséssemos mover este sólido no espaço, sem deformá-lo, e desejássemos contar todas as possiveis configurações, como poderíamos fazer isso?

A resposta é justamente o grupo de simetria!

Pecisamos deixar claro duas coisas:

- O que é um grupo?
- O que significa *'mover sem deformar'*.

Relembre/Conheça algo novo

Grupo

É o par $(G, *)$ formado por um conjunto não vazio G e uma operação $*: G \times G \to G$ que seja associativa, possua elemento neutro e todo elemento possua inverso. Simplificamos a notação por G.
A ordem do grupo G, denotada por $|G|$, é a sua cardinalidade.

Exemplinhos:

- $(\{e\}, *)$ é o grupo mais simples.
- **Grupo cíclico:** gerado por um único elemento.
  $\mathbb{Z} = (\mathbb{Z}, +)$ é gerado por 1 e tem infinitos elementos.
  $\mathbb{Z}_2 = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +) = \{\overline{0}, \overline{1}\}$ é gerado por $\overline{1}$ e tem 2 elementos.
  $C_n = \langle g \rangle$ grupo cíclio de ordem n.

Relembre/Conheça algo novo

Grupo

É o par $(G, *)$ formado por um conjunto não vazio G e uma operação $*: G \times G \to G$ que seja associativa, possua elemento neutro e todo elemento possua inverso. Simplificamos a notação por G.
A ordem do grupo G, denotada por $|G|$, é a sua cardinalidade.

Exemplinhos:

- $(\{e\}, *)$ é o grupo mais simples.
- **Grupo cíclico:** gerado por um único elemento.
  $\mathbb{Z} = (\mathbb{Z}, +)$ é gerado por 1 e tem infinitos elementos.
  $\mathbb{Z}_2 = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +) = \{\overline{0}, \overline{1}\}$ é gerado por $\overline{1}$ e tem 2 elementos.
  $C_n = \langle g \rangle$ grupo cíclio de ordem n.

Relembre/Conheça algo novo

Grupo

É o par $(G, *)$ formado por um conjunto não vazio G e uma operação $*: G \times G \to G$ que seja associativa, possua elemento neutro e todo elemento possua inverso. Simplificamos a notação por G.
A ordem do grupo G, denotada por $|G|$, é a sua cardinalidade.

Exemplinhos:

- $(\{e\}, *)$ é o grupo mais simples.
- **Grupo cíclico:** gerado por um único elemento.
  $\mathbb{Z} = (\mathbb{Z}, +)$ é gerado por 1 e tem infinitos elementos.
  $\mathbb{Z}_2 = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +) = \{\overline{0}, \overline{1}\}$ é gerado por $\overline{1}$ e tem 2 elementos.
  $C_n = \langle g \rangle$ grupo cíclio de ordem n.

Relembre/Conheça algo novo

Grupo

É o par $(G, *)$ formado por um conjunto não vazio G e uma operação $*: G \times G \to G$ que seja associativa, possua elemento neutro e todo elemento possua inverso. Simplificamos a notação por G.
A ordem do grupo G, denotada por $|G|$, é a sua cardinalidade.

Exemplinhos:

- $(\{e\}, *)$ é o grupo mais simples.
- **Grupo cíclico:** gerado por um único elemento.
  $\mathbb{Z} = (\mathbb{Z}, +)$ é gerado por 1 e tem infinitos elementos.
  $\mathbb{Z}_2 = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +) = \{\overline{0}, \overline{1}\}$ é gerado por $\overline{1}$ e tem 2 elementos.
  $C_n = \langle g \rangle$ grupo cíclio de ordem n.

Relembre/Conheça algo novo

Grupo

É o par $(G, *)$ formado por um conjunto não vazio G e uma operação $*: G \times G \to G$ que seja associativa, possua elemento neutro e todo elemento possua inverso. Simplificamos a notação por G.
A ordem do grupo G, denotada por $|G|$, é a sua cardinalidade.

Exemplinhos:

- $(\{e\}, *)$ é o grupo mais simples.
- **Grupo cíclico:** gerado por um único elemento.
  $\mathbb{Z} = (\mathbb{Z}, +)$ é gerado por 1 e tem infinitos elementos.
  $\mathbb{Z}_2 = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +) = \{\overline{0}, \overline{1}\}$ é gerado por $\overline{1}$ e tem 2 elementos.
  $C_n = \langle g \rangle$ grupo cíclio de ordem n.

Relembre/Conheça algo novo

Grupo

É o par $(G, *)$ formado por um conjunto não vazio G e uma operação $*: G \times G \to G$ que seja associativa, possua elemento neutro e todo elemento possua inverso. Simplificamos a notação por G.
A ordem do grupo G, denotada por $|G|$, é a sua cardinalidade.

Exemplinhos:

- $(\{e\}, *)$ é o grupo mais simples.
- **Grupo cíclico:** gerado por um único elemento.
  $\mathbb{Z} = (\mathbb{Z}, +)$ é gerado por 1 e tem infinitos elementos.
  $\mathbb{Z}_2 = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +) = \{\overline{0}, \overline{1}\}$ é gerado por $\overline{1}$ e tem 2 elementos.
  $C_n = \langle g \rangle$ grupo cíclio de ordem n.

Relembre/Conheça algo novo

- **Grupo diedral D_m:** o grupo das simetrias de um polígono regular de $m \geq 3$ lados. D_m é um grupo com a operação **composição** e sua ordem é $2m$.

Vamos fazer o caso $m = 4$, isto é, queremos estudar o grupo de simetria do quadrado.

Mover o quadradro no plano, sem deformá-lo,
só nos permite rotacioná-lo, ou refleti-lo.

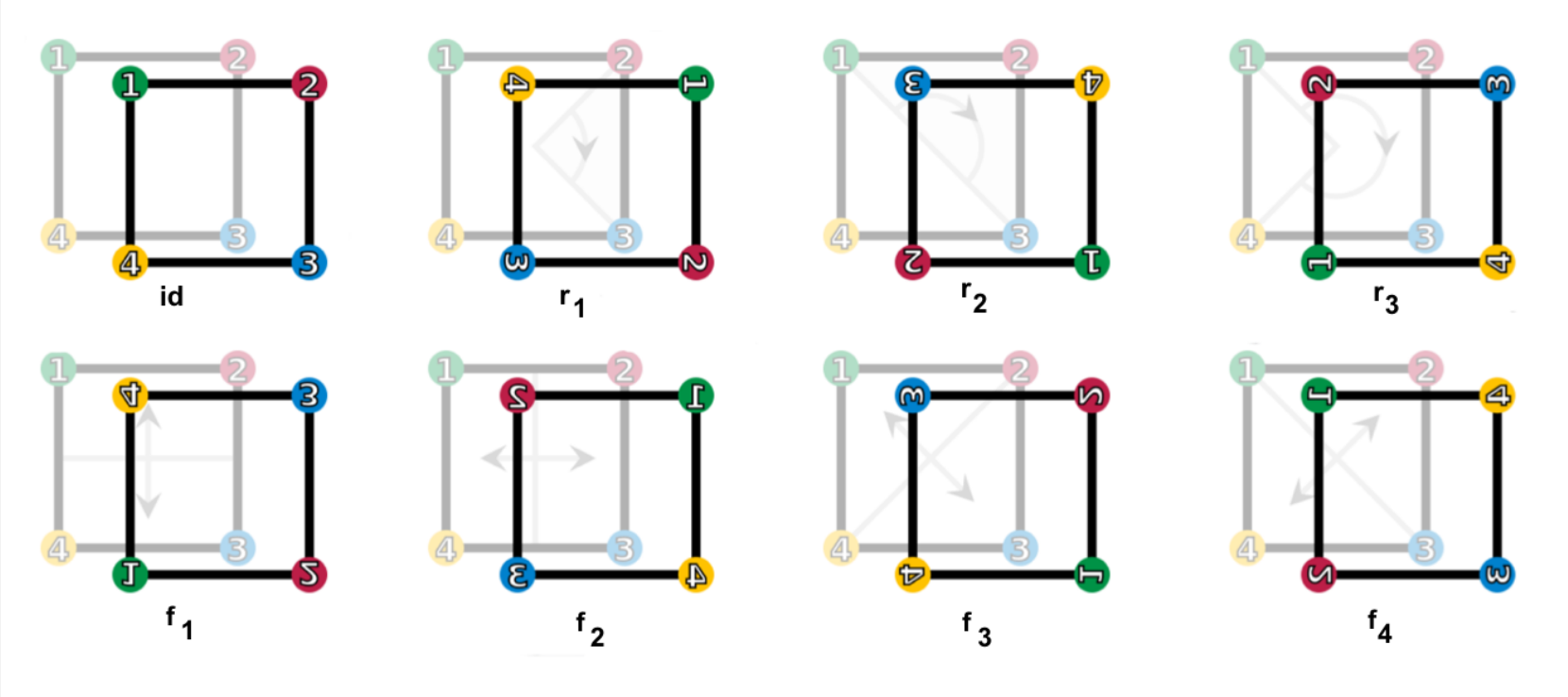
Relembre/Conheça algo novo

- **Grupo diedral D_m:** o grupo das simetrias de um polígono regular de $m \geq 3$ lados. D_m é um grupo com a operação **composição** e sua ordem é $2m$.

Vamos fazer o caso $m = 4$, isto é, queremos estudar o grupo de simetria do quadrado.

Mover o quadradro no plano, sem deformá-lo,
só nos permite rotacioná-lo, ou refleti-lo.

Relembre/Conheça algo novo



Exemplo: Opere $r_1 \circ f_3$ e veja que elemento é.

Relembre/Conheça algo novo

- **Grupo das permutações S_n:** o grupo das permutações de um conjunto com n elementos. É um grupo com a operação composição e sua ordem é $n!$.

Vamos fazer o caso para $n = 3$.

Precisamos encontrar as permutações de 3 elementos, isto é, as $3! = 6$ configurações possíveis.

Para facilitar a nossa vida, podemos nomear os elementos do conjunto por 1, 2 e 3.

Relembre/Conheça algo novo

- **Grupo das permutações S_n:** o grupo das permutações de um conjunto com n elementos. É um grupo com a operação composição e sua ordem é $n!$.

Vamos fazer o caso para $n = 3$.

Precisamos encontrar as permutações de 3 elementos, isto é, as $3! = 6$ configurações possíveis.

Para facilitar a nossa vida, podemos nomear os elementos do conjunto por 1, 2 e 3.

Relembre/Conheça algo novo

Os 6 elementos do grupo são:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{id} \qquad (\mathbf{23}) \qquad (\mathbf{13})$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(\mathbf{12}) \qquad (\mathbf{132}) \qquad (\mathbf{123})$$

Exemplo: Componha $(23)(13)$ e $(12)(13)$:

Relembre/Conheça algo novo

- **Grupo das permutações pares A_n:** Uma permutação é par se ela pode ser representada como um produto de um número par de transposições (2-ciclo). A_n é um grupo (sugbrupo de S_n) com a operação composição e sua ordem é $\frac{n!}{2}$.

Para $n = 3$, pudemos observar que as permutações pares são $(\mathbf{132}) = (23)(13)$ e $(\mathbf{123}) = (12)(13)$. Logo, A_3 é grupo formado por:

$$\underset{\mathbf{id}}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}} \qquad \underset{(\mathbf{132})}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}} \qquad \underset{(\mathbf{123})}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}}$$

Exercício: Opere $(132)^2 = (132)(132)$ e $(132)(123)$.
Quem é o inverso de cada elemento?

Relembre/Conheça algo novo

- **Grupo das permutações pares A_n:** Uma permutação é par se ela pode ser representada como um produto de um número par de transposições (2-ciclo). A_n é um grupo (sugbrupo de S_n) com a operação composição e sua ordem é $\frac{n!}{2}$.

Para $n = 3$, pudemos observar que as permutações pares são $(\mathbf{132}) = (23)(13)$ e $(\mathbf{123}) = (12)(13)$. Logo, A_3 é grupo formado por:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\mathbf{id} \qquad (\mathbf{132}) \qquad (\mathbf{123})$$

Exercício: Opere $(132)^2 = (132)(132)$ e $(132)(123)$.
Quem é o inverso de cada elemento?

Voltando para os sólidos

Estamos em busca do grupo de simetria de cada Sólido Platônico.
Para isto, desejamos mover o sólido de maneira isométrica.

Lembre-se/Aprenda:

Uma *isometria* em $\mathbb{R}^n$ é uma função bijetora $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ que preserva distâncias.

Ou seja,

$$\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|, \quad \text{para todo} \quad x, y \in \mathbb{R}^n$$

na qual "$\|\ \|$" é a norma Euclidiana.

O conjunto $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$ constituído por tais aplicações é um grupo com a composição de funções.

Voltando para os sólidos

Estamos em busca do grupo de simetria de cada Sólido Platônico.
Para isto, desejamos mover o sólido de maneira isométrica.

Lembre-se/Aprenda:

Uma *isometria* em $\mathbb{R}^n$ é uma função bijetora $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ que preserva distâncias.

Ou seja,

$$\|f(\mathrm{x}) - f(\mathrm{y})\| = \|\mathrm{x} - \mathrm{y}\|, \quad \text{para todo} \quad \mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathbb{R}^n$$

na qual "$\|\,\|$" é a norma Euclidiana.

O conjunto $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$ constituído por tais aplicações é um grupo com a composição de funções.

Voltando para os sólidos

Estamos em busca do grupo de simetria de cada Sólido Platônico.
Para isto, desejamos mover o sólido de maneira isométrica.

Lembre-se/Aprenda:

Uma *isometria* em $\mathbb{R}^n$ é uma função bijetora $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ que preserva distâncias.

Ou seja,

$$\|f(\mathrm{x}) - f(\mathrm{y})\| = \|\mathrm{x} - \mathrm{y}\|, \qquad \text{para todo} \qquad \mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathbb{R}^n$$

na qual "$\|\,\|$" é a norma Euclidiana.

O conjunto $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$ constituído por tais aplicações é um grupo com a composição de funções.

Mas qual é a cara de $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$?

Uma descrição mais precisa destas isometrias é a seguinte:

$$f \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n) \iff \begin{cases} \exists\, A \text{ matriz ortogonal de ordem } n \times n \\ \text{e } \mathrm{v} \in \mathbb{R}^n \text{ tal que } f(\mathrm{x}) = A\mathrm{x} + \mathrm{v}. \end{cases}$$

Lembre-se: $A_{n\times n}$ é ortogonal se $A^{-1} = A^T$. Exemplos importantes:

- Matriz identidade;
- Matriz ortogonal com determinante 1 $\rightarrow$ rotações;
- Matriz ortogonal com determinante -1 $\rightarrow$ reflexões.

Mas qual é a cara de $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$?

Uma descrição mais precisa destas isometrias é a seguinte:

$$f \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n) \iff \begin{cases} \exists\, A \text{ matriz ortogonal de ordem } n \times n \\ \text{e } \mathrm{v} \in \mathbb{R}^n \text{ tal que } f(\mathrm{x}) = A\mathrm{x} + \mathrm{v}. \end{cases}$$

Lembre-se: $A_{n\times n}$ é ortogonal se $A^{-1} = A^T$. Exemplos importantes:

- Matriz identidade;
- Matriz ortogonal com determinante 1 $\rightarrow$ rotações;
- Matriz ortogonal com determinante -1 $\rightarrow$ reflexões.

E cadê os grupos de simetria?

Os subgrupos de $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$ são justamente os subconjuntos das funções f que fixam subconjuntos de $\mathbb{R}^n$.

Concretamente, seja $X \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto contendo a origem.

O *grupo de simetrias* de X será

$$S(X) = \Big\{ f \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n) \mid f(X) = X \Big\}.$$

Destacaremos o subgrupo de $S(X)$ das rotações de X, denotado por $R(X)$:

$$R(X) = \Big\{ f \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n) \mid f(x) = Ax, \text{ com } A \text{ ortogonal e } \det A = 1 \Big\}.$$

E cadê os grupos de simetria?

Os subgrupos de $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$ são justamente os subconjuntos das funções f que fixam subconjuntos de $\mathbb{R}^n$.

Concretamente, seja $X \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto contendo a origem.

O *grupo de simetrias* de X será

$$S(X) = \Big\{ f \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n) \mid f(X) = X \Big\}.$$

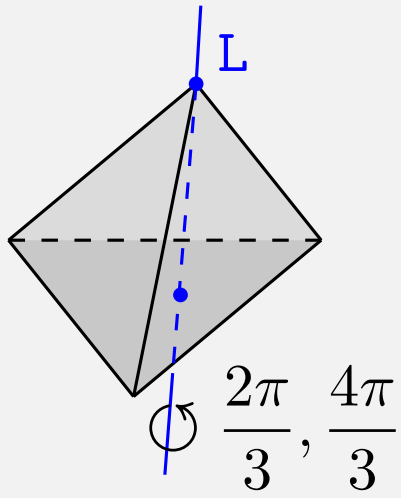
Destacaremos o subgrupo de $S(X)$ das rotações de X, denotado por $R(X)$:

$$R(X) = \Big\{ f \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n) \mid f(x) = Ax, \text{ com } A \text{ ortogonal e } \det A = 1 \Big\}.$$

Rotações do tetraedro

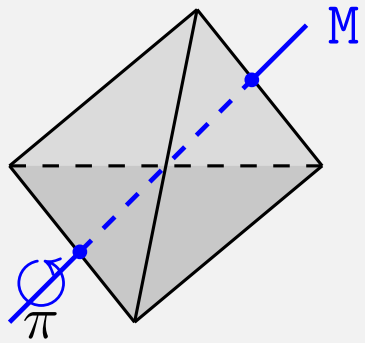
Há duas escolhas para o eixo de rotação:

- Eixo de rotação L passando por um vértice e pelo centro da face oposta. Com ângulo de rotação $\frac{2\pi}{3}$ e $\frac{4\pi}{3}$, respectivamente.
  Levando em conta as quatro possíveis escolhas de vértice, obtemos 8 rotações.



Rotações do tetraedro

- Eixo de rotação M passando pelo ponto médio de uma das arestas e pelo ponto de médio da aresta oposta (aquela que resulta da interseção das faces, que não contém a aresta onde fixamos o primeiro ponto médio). Com ângulo de rotação π.
  Considerando as três possíveis escolhas de pares de arestas, obtemos 3 rotações.



8 rotações $+$ 3 rotações $+$ identidade $= 12$ rotações, e assim $|R(\mathrm{X})| = 12$.

Rotações do tetraedro

Note que essas rotações permutam os vértices do tetraedro, e portanto, podemos associa-las a uma permutação em S_4:

Enumere os vértices do tetraedro de 1 a 4, e denotarmos por $p_{i,j}$ o ponto médio da aresta com extremos nos vértices i e j. Deste modo, podemos representar as rotações da seguinte forma:

$$\begin{array}{lcl} \text{Eixo L passando pelo vértice 1 e ângulo } \frac{2\pi}{3} & \longmapsto & (2\,3\,4). \\ \text{Eixo L passando pelo vértice 1 e ângulo } \frac{4\pi}{3} & \longmapsto & (2\,4\,3). \\ \text{Eixo M passando por } p_{2,3},\ p_{1,4} \text{ e ângulo } \pi & \longmapsto & (2\,3)(1\,4). \end{array}$$

Logo, $R(\mathrm{X}) \cong A_4$.

Exercícios

Vamos testar se entemos o conjunto da rotações.

- Calcule o grupo de rotações do cubo, que também vale para o seu dual o octaedro.

- Calcule o grupo de rotações do dodecaedro, que também vale para o seu dual o icosaedro.

E pra ajudar na tarefinha...

Grupos de simetria dos Sólidos Platônicos

Seja X um sólido platônico e C_2 um grupo cíclico de ordem 2, então

(i) $S(\mathrm{X}) \cong S_4$ e $R(\mathrm{X}) \cong A_4$, se X for um tetraedro.

(ii) $S(\mathrm{X}) \cong S_4 \times C_2$ e $R(\mathrm{X}) \cong S_4$, se X for um cubo ou um octaedro.

(iii) $S(\mathrm{X}) \cong A_5 \times C_2$ e $R(\mathrm{X}) \cong A_5$, se X for um dodecaedro ou um icosaedro.