

Topologia - Para final

1. Defina fronteira de um subconjunto S de um espaço topológico X . De exemplo de:

(a) Um subconjunto $S \neq X$, $S \neq \emptyset$, com $fr(S) = \emptyset$.

(b) Um subconjunto $S \subset X$ com $fr(S) = X$.

(c) Um subconjunto discreto da reta, que não é fechado em $\mathbb{R}$.

2. Prove que um espaço topológico X é de Hausdorff se, e somente se, a diagonal $\Delta \subset X \times X$ é um subconjunto fechado.

3. O produto $X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ é conexo se, e somente se, cada fator X_i é conexo.

4. Seja A um subconjunto limitado e não vazio de um espaço métrico X . Prove que o diâmetro de A é igual ao diâmetro do seu fecho $\bar{A}$.

5. Defina espaço normal. Enuncie o Lema de Urysohn e demonstre-o no caso de espaços métricos.

6. a) Seja X um espaço de Hausdorff. Prove que todo subconjunto $K \subset X$ é fechado em X .

b) Para que um espaço topológico X seja conexo é necessário e suficiente que toda aplicação contínua de X num espaço discreto seja constante.