

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAIBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

PROGRAMA DE VERÃO - 1994

2ª Prova de Introdução à Análise - Prof. Osmundo A. Lima

1ª Questão: Seja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b) . Suponha que $a \leq f(x) \leq b \quad \forall x \in [a, b]$ e $|f'(x)| \leq K < 1 \quad \forall x \in (a, b)$. Prove que existe um único $x \in [a, b]$ tal que $f(x) = x$.

2ª Questão: Seja $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\varphi(x) = \begin{cases} -1/(1-x^2), & \text{se } |x| < 1 \\ 0, & \text{se } |x| \geq 1 \end{cases}$$

Mostre que φ é de classe C^∞ em $\mathbb{R}$.

3ª Questão: Considere as sequências (f_n) e (g_n) definidas em $[0, 1]$ e $(0, 1)$ respectivamente por:

$$f_n(x) = x^n(1-x) \quad \text{e} \quad g_n(x) = \frac{\sin nx}{nx}.$$

Mostre que (f_n) e (g_n) convergem pontualmente. Quais delas convergem uniformemente?

4ª Questão: Seja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua e suponha que $\int_a^b x^n f(x) dx = 0$ para

$n = 0, 1, 2, \dots$. Mostre que

a) $\int_a^b f^2(x) dx = 0$

b) $f(x) = 0 \quad \forall x \in [a, b]$.

5ª Questão: Seja (f_n) uma sequência de funções contínuas definidas em $[0, 1]$ tais que:

a) $f_n(0) = a \quad \forall n \in \mathbb{N}$, e

b) existe $K > 0$ tal que $|f_n(x) - f_n(y)| \leq K|x - y|, \forall n \in \mathbb{N} \text{ e } \forall x \in [a, b]$.

Mostre que (f_n) possui uma subsequência uniformemente convergente no intervalo $[0, 1]$.
