



UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

EXERCÍCIOS DE CÁLCULO 2

(RESPOSTAS E SOLUÇÕES)

Prof. Marivaldo Matos

joão pessoa, pb
outubro/1999

“A mathematician is one to whom $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2p}$ is as obvious as that twice two makes four is to you. Liouville was a mathematician.”

LORD KELVIN

0. REVISÃO

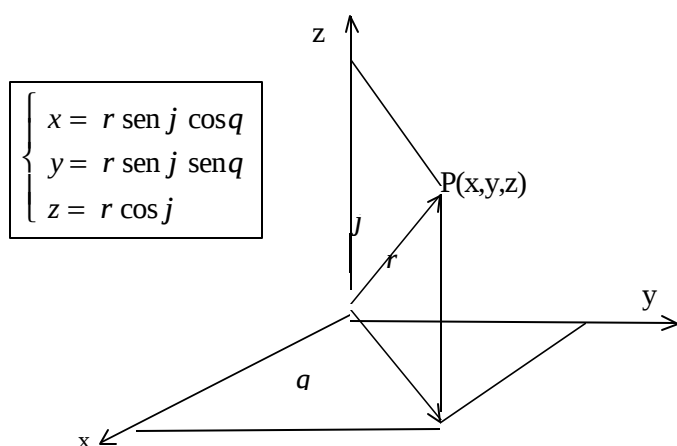
- 0.1.** Enuncie e dê uma interpretação geométrica do Teorema do Valor Médio.
- 0.2.** Mostre que uma função com derivada nula num intervalo é constante nesse intervalo.
- 0.3.** Qual a área do maior retângulo inscrito num círculo de raio R , com um lado sobre um diâmetro?
- 0.4.** Mostre que $\log x \leq x$, $\forall x > 0$. Visualize a situação geometricamente.
- 0.5.** Enuncie o Teorema Fundamental do Cálculo.
- 0.6.** Qual a área da região do plano xy delimitada pelos eixos coordenados e pela curva $x = \frac{1}{y}$, $y > 0$?
- 0.7.** Calcule a derivada de cada função abaixo, no ponto $x = 0$.
- (a) $F(x) = \int_x^{x^2} e^{t^2} dt$

(b) $G(x) = \int_x^{1+2x^3} \cos(t^2 + 1) dt$
- 0.8.** Qual a equação do cone obtido girando a reta $y = ax + b$, $z = 0$, em torno do eixo y ?
- 0.9.** Qual o lugar geométrico descrito pela equação $x + y + z = 1$? Esboce seu gráfico no 1º octante.
- 0.10.** Qual a equação do plano tangente à esfera $x^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 2$, no ponto $(1, 1, 1)$?
- 0.11.** Qual o lugar geométrico descrito pela equação $z = xy$?
- 0.12.** Na página seguinte você encontrará relações entre as coordenadas cartesianas e as coordenadas “cilíndricas” e “esféricas” de um ponto. Por observação das figuras, deduza as relações apresentadas.
- 0.13.** Identifique e esboce o gráfico da quádrlica de equação $x^2 + y^2 = z^2$. Determine sua equação nas coordenadas esféricas r, θ, ϕ .

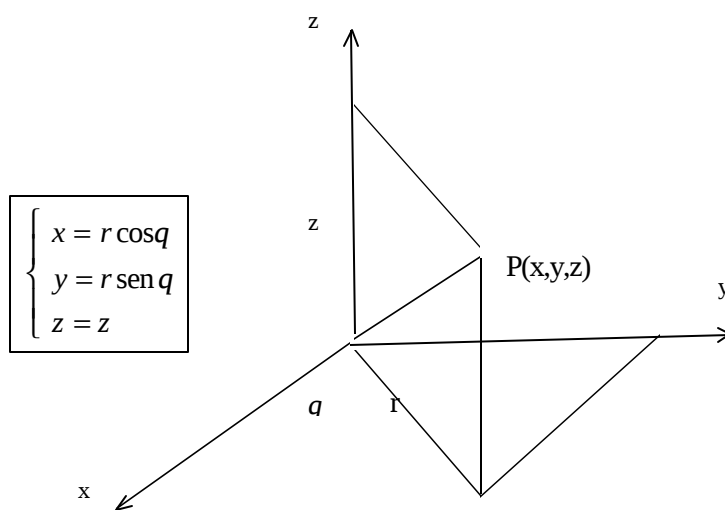
0.14. Identifique o sólido descrito pelas desigualdades $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ e $z^2 \geq x^2 + y^2$.

0.15. Identifique o sólido descrito por $x^2 + y^2 \leq 1$ e escreva sua equação nas coordenadas cilíndricas r, θ, z .

COORDENADAS ESFÉRICAS



COORDENADAS CILÍNDRICAS

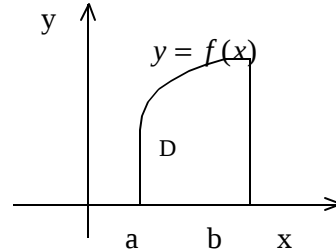


1. APLICAÇÕES DA INTEGRAL

ÁREAS PLANAS

Seja D a região do plano xy delimitada pelo eixo x , pelo gráfico de uma função contínua não negativa $y = f(x)$ e pelas retas $x = a$ e $x = b$, conforme mostra a figura ao lado. A área da região D é dada pela integral simples

$$A(D) = \int_a^b f(x) dx$$



1.1. Calcule a área de um círculo de raio R e da elipse de equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

1.2. Calcule a área da figura delimitada pelo eixo x , pelas retas $x = \pm B$, $B > 0$, e pelo gráfico da função $y = x^2 \exp(-|x^3|)$. Esta área tem um limite quando $B \rightarrow \infty$?

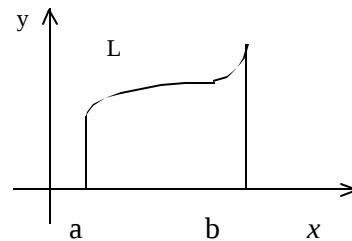
1.3. Considere B um número real maior do que 2. Calcule a área sob a curva $y = \frac{1}{x(\log x)^2}$ entre $x = 2$ e $x = B$. Esta área tem um limite quando $B \rightarrow \infty$?

COMPRIMENTO DE CURVAS

A. FORMA CARTESIANA

Considere uma curva no plano xy , que é representada pelo gráfico de uma função $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, contínua com derivada primeira também contínua (uma tal função é dita de *classe C^1*) e denote por L o seu comprimento, conforme indica a figura ao lado. O valor de L é dado por

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$



1.4. Determine o comprimento de uma circunferência de raio R .

1.5. As curvas abaixo são dadas na forma cartesiana. Em cada caso calcule o comprimento do arco indicado:

$$\begin{array}{lll}
 (a) y = x^2 + 2x - 1, 0 \leq x \leq 1 & (b) y = e^x, 0 \leq x \leq 1 & (c) (y+1)^2 = (x-4)^3, 5 \leq x \leq 8 \\
 (d) 8x^2 = 27y^3, 1 \leq x \leq 8 & (e) y = x^{3/2}, 1 \leq x \leq 3 & (f) y = 1 - \ln(\sin x), \frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{4} \\
 (g) y = \frac{2}{3}(1+x^2)^{3/2}, 0 \leq x \leq 3. & (h) y = \frac{x^3}{12} + \frac{1}{x}, 1 \leq x \leq 2 & (i) y + \frac{1}{4x} + \frac{x^3}{3} = 0, 2 \leq x \leq 3 \\
 (j) y = \frac{\sqrt{x}}{3}(3-x), 0 \leq x \leq 3 & (k) x = \frac{y^3}{2} + \frac{1}{6y}, 1 \leq y \leq 3 & (l) y = \frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{2}{3}x^{3/2}, 1 \leq x \leq 3
 \end{array}$$

B. FORMA PARAMÉTRICA

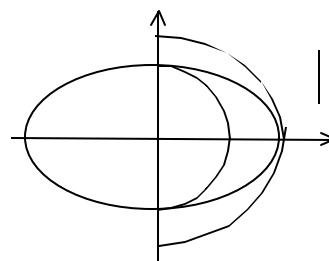
Neste caso as curvas são descritas por um par de equações $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, onde o parâmetro t varia num intervalo $[a, b]$, sendo $x(t)$ e $y(t)$ funções de classe C^1 neste intervalo. O comprimento L vem dado por

$$L = \int \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

1.6. Calcule o comprimento de um círculo de raio R , usando as equações paramétricas.

1.7. Por observação da figura ao lado, estabeleça a seguinte parametrização para a elipse do exercício (1.1):

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi. \end{cases}$$



1.8. Imitando o que foi feito no exercício (B2), obtenha para a hipérbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ a seguinte

parametrização $\begin{cases} x(t) = a \sec t \\ y(t) = b \tan t \end{cases}$.

1.9. Calcule o comprimento da Hipociclóide de equação $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

1.10. Calcule a distância percorrida por uma partícula entre os instantes $t = 0$ e $t = 4$, se sua posição $P(x, y)$ no instante t é dada por $\begin{cases} x = \frac{1}{2}t^2 \\ y = \frac{1}{3}(2t+1)^{3/2} \end{cases}$.

1.11. As curvas dadas abaixo estão na forma paramétrica. Em cada caso calcule o comprimento do arco indicado:

$$\begin{array}{lll}
 (a) \left| \begin{array}{l} x(t) = t^3 \\ y(t) = t^2, -1 \leq t \leq 3 \end{array} \right. & (b) \left| \begin{array}{l} x(t) = e^t \cos t \\ y(t) = e^t \sin t, 0 \leq t \leq 1 \end{array} \right. & (c) \left| \begin{array}{l} x(t) = 2(1 - \sin t) \\ y(t) = 2(1 - \cos t), 0 \leq t \leq p \end{array} \right. \\
 (d) \left| \begin{array}{l} x(t) = t \cos t \\ y(t) = t \sin t, 0 \leq t \leq p \end{array} \right. & (e) \left| \begin{array}{l} x(t) = \cos 2t \\ y(t) = \sin^2 t, 0 \leq t \leq p \end{array} \right. & (f) \left| \begin{array}{l} x(t) = \frac{1}{2}t^2 + t \\ y(t) = \frac{1}{2}t^2 - t, 0 \leq t \leq 1 \end{array} \right.
 \end{array}$$

1.12. Considere a curva c dada por $\left| \begin{array}{l} x(t) = t^3 - 3t \\ y(t) = t^2 - 5t - 1, t \in \mathbb{R} \end{array} \right.$. Pede-se a equação da reta tangente à curva c no ponto correspondente a $t = 2$ e os pontos da curva onde a reta tangente é horizontal ou vertical.

1.13. Repita o exercício (1.8) para as curvas do exercício (1.11), considerando, para facilitar os cálculos, o ponto correspondente a $t = 0$.

COORDENADAS POLARES

1.14. Localize os seguintes pontos dados em coordenadas polares (r, q) e em seguida obtenha as coordenadas cartesianas correspondentes:

$$(a) (2, p/4) \quad (b) (2, 3p/2) \quad (c) (3, p/6) \quad (d) (1, -p/4) \quad (e) (2, 5p/6)$$

1.15. Encontre as coordenadas polares dos pontos cujas coordenadas cartesianas são:

$$(a) (1/2, 1/2) \quad (b) (p/2, p/2) \quad (c) (-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2) \quad (d) (3, 3\sqrt{3}) \quad (e) (-1, -1)$$

1.16. Passe para forma polar ($r = f(q)$) cada curva dada a seguir em coordenadas cartesianas:

$$\begin{array}{lll}
 (a) xy = 2 & (b) x^2 + y^2 - 3y = 0 & (c) 3x^2 + 5y^2 = 15 \\
 (d) x = -1 & (e) x^2 - y^2 = 1 & (f) y^2 = 4x
 \end{array}$$

1.17. Passe para a forma cartesiana ($F(x, y) = 0$) cada curva dada a seguir em coordenadas polares. Esboce o gráfico em cada caso:

$$\begin{array}{lllll}
 (a) r = q & (b) r = \sin 2q & (c) r = 2 \sin q & (d) r = 5 & (e) r = a \cos q \\
 (f) r = 5 + 2 \cos q & (g) r = 3 \sec q & (h) r = 2 \tan q & (i) r = 1 + \sqrt{2} \cos q & (j) r = 2 + \sin 2q \\
 (l) r^2 = \frac{2a^2 \cos q}{3} & (m) r = \frac{1}{q} & (n) q = \frac{p}{2} & (o) r = \frac{4}{1 + \cos q} & (p) r = \frac{4}{1 - \cos q}
 \end{array}$$

1.18. Sejam (r, q) e (r, j) as coordenadas polares dos pontos P e Q, respectivamente. Usando a lei dos co-senos, mostre que a distância entre P e Q é dada por

$$\text{dist}(P, Q) = \sqrt{r^2 + r^2 - 2rr \cos(q - j)}$$

1.19. Usando o exercício anterior, conclua que, em coordenadas polares, o círculo de centro no ponto (r, j) e raio $a > 0$ tem equação polar

$$r^2 + r^2 - 2rr \cos(q - j) = a^2.$$

1.20. Considere a curva de equação polar $r = \sin q + \cos q, q \in [-p/4, p/4]$. De duas maneiras identifique a curva como um arco de circunferência: primeiro passe a equação para coordenadas cartesianas; depois coloque a equação no contexto geral do exercício (1.19).

1.21. Mostre que cada uma das equações dada a seguir representa uma reta e esboce seu gráfico: $q = c$; $r \cos q = \pm a$; $r \sin q = \pm a$. Generalizando, mostre que se $N(r, j)$ é o pé da perpendicular traçada do pólo a uma reta (que não passa pelo pólo), então a equação da reta será

$$r \cos(q - j) = r \quad \text{ou} \quad r = \frac{r}{A \cos q + B \sin q},$$

onde $A = \cos j$ e $B = \sin j$

1.22. Estude a interseção entre os seguintes pares de curvas:

(a) $r = 2$ e $r = 4 \cos q$

(b) $r^2 = 4 \sin 2q$ e $r = 2\sqrt{2} \cos q$

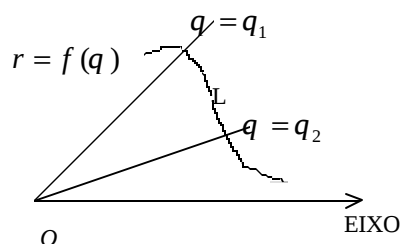
(c) $r = 1 + \cos q$ e $r = \frac{1}{2(1 - \cos q)}$

(e) $q = \frac{p}{4}$ e $r = 2 \cos q$

COMPRIMENTO DE CURVAS (FORMA POLAR)

As curvas em coordenadas polares aqui consideradas são descritas por uma equação da forma $r = f(q)$, sendo f uma função contínua, juntamente com sua derivada primeira, num intervalo $[q_1, q_2]$. Veja a figura ao lado. O comprimento L da curva vem dado por

$$L = \int_{q_1}^{q_2} \sqrt{f(q)^2 + f'(q)^2} dq$$



1.23. Calcule o comprimento das seguintes curvas dadas na forma polar:

(a) $r = 3 \cos q, 0 \leq q \leq \frac{1}{4}p$

(b) $r = 1 - \cos q, 0 \leq q \leq \frac{p}{2}$

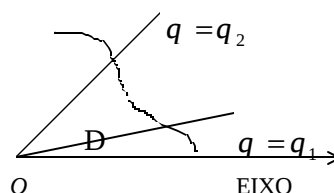
(c) $r = 2 \sec q, 0 \leq q \leq \frac{1}{3}p$

- (d) $r = |\sin q|$, $0 \leq q \leq 2\pi$ (e) $r = \frac{1}{3}q$, $0 \leq q \leq \frac{\pi}{2}$ (f) $r = 3\cos^2(\frac{1}{2}q)$, $0 \leq q \leq \frac{\pi}{2}$
 (g) $r = a \sin^3(\frac{1}{3}q)$, $0 \leq q \leq \frac{\pi}{2}$ (h) $r = aq^2$, $0 \leq q \leq \frac{\pi}{2}$ (i) $r = \sin q + \cos q$, $0 \leq q \leq \frac{\pi}{2}$

ÁREA EM COORDENADAS POLARES

Dada uma curva na forma polar pela equação $r = f(q)$, a região D delimitada pela curva e pelas retas $q = q_1$ e $q = q_2$ tem área igual a

$$A(D) = \int_{q_1}^{q_2} \frac{1}{2} f(q)^2 dq$$



1.24. Determine a área total interior a cada curva dada abaixo na forma polar:

- (a) $r^2 = a^2 \cos 2q$ (b) $r = a(2 - \cos q)$ (c) $r = a(1 + \cos 2q)$
 (d) $r = 2a \sin q$ (e) $r^2 = 1 - \cos q$ (f) $r^2 = 2a^2 \cos^2(\frac{1}{2}q)$

1.25. Calcule a área interior ao círculo $r = a$ e exterior à cardióide $r = a(1 - \cos q)$. Esboce um gráfico.

1.26. Calcule a área delimitada pelas curvas dadas em coordenadas polares por $r = 2$, $q = \frac{\pi}{4}$ e $q = \frac{\pi}{2}$.

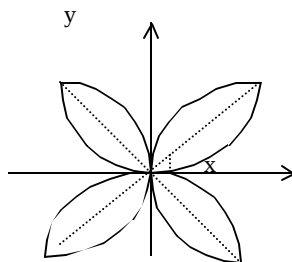
1.27. Calcule a área interior à cardióide $r = a(1 + \sin q)$ e exterior ao círculo $r = a \sin q$.

1.28. Calcule a área comum aos círculos $r = 2a \cos q$ e $r = 2a \sin q$.

1.29. Calcule a área interior a Lemniscata de Bernoulli $r^2 = 2a^2 \cos 2q$ e exterior ao círculo $r = a$.

1.30. Calcule a área interior ao círculo $r = 3a \cos q$ e exterior à cardióide $r = a(1 + \cos q)$.

1.31. Calcule a área da rosácea de 4 folhas $r = a|\sin 2q|$. (ver figura)

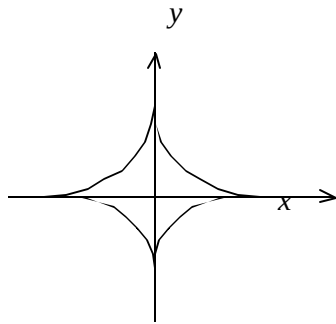


1.32. Calcule a área da região D interior ao círculo $r = \cos \alpha$ e exterior à cardióide de equação $r = 1 + \sin \alpha$.

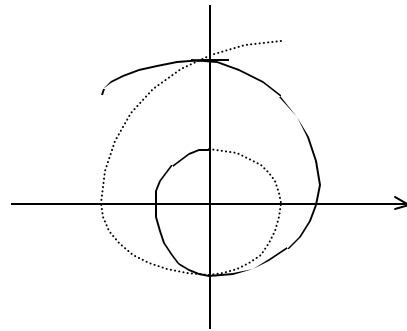
1.33. Calcule a área da região D interior ao círculo $r = \sin \alpha$ e exterior à cardióide de equação $r = 1 - \cos \alpha$.

ALGUMAS CURVAS ESPECIAIS

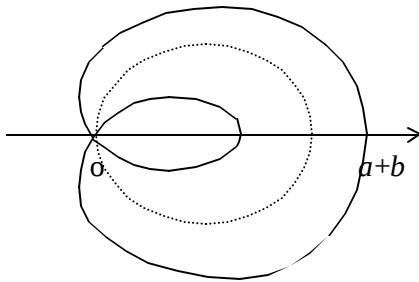
Hipociclóide: $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$



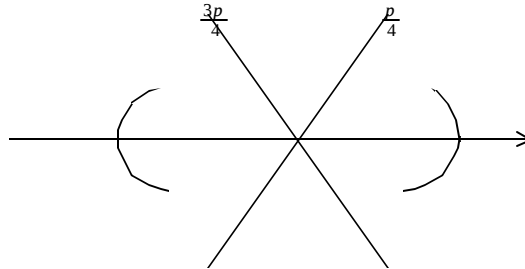
Espiral de Arquimedes: $r = a\alpha$



Caracol de Pascal: $r = a + b \cos \alpha$



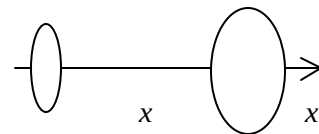
Leminiscata de Bernoulli: $r^2 = a^2 \cos 2\alpha$



SUPERFÍCIES DE REVOLUÇÃO

A. EQUAÇÃO DE UMA SUPERFÍCIE DE REVOLUÇÃO

Seja c uma curva no plano xy descrita pela relação $F(x, y) = 0$ e seja S a superfície obtida pela rotação da curva c , em torno do eixo x . É claro que cada ponto da curva c irá descrever uma circunferência de centro no ponto $C(x, 0, 0)$. Veja a figura ao lado. A superfície S é representada na forma vetorial pela equação $\|CP\| = \|CQ\|$ e na forma cartesiana sua equação é



$$F(x, \pm\sqrt{y^2 + z^2}) = 0.$$

No caso da curva ser dada na forma explícita por $y = f(x)$, a

equação cartesiana assume a forma seguinte: $y^2 + z^2 = [f(x)]^2$.

1.34. Identifique a geratriz e o eixo de rotação da superfície de revolução cuja equação é

(a) $z = x^2 + y^2$

(b) $x = y^2 + z^2$

(c) $y^2 = x^2 + z^2$

(d) $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$

(e) $y^2 + z^2 = 1$

(f) $4x^2 + 9y^2 - z^2 = 36$

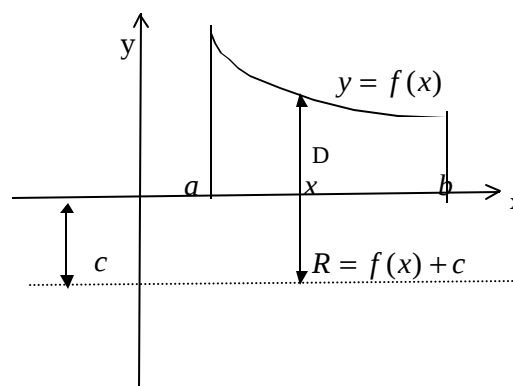
B. VOLUMES: SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO

B.1 MÉTODO DAS FATIAS

O sólido S é gerado pela rotação da região D em torno da reta (eixo) $y = c$. O volume infinitesimal é dado por $dV = k(R^2 - c^2)dx$ e o volume de S pode ser calculado pela fórmula

$$\text{vol}(S) = \int_a^b p[R^2 - c^2]dx,$$

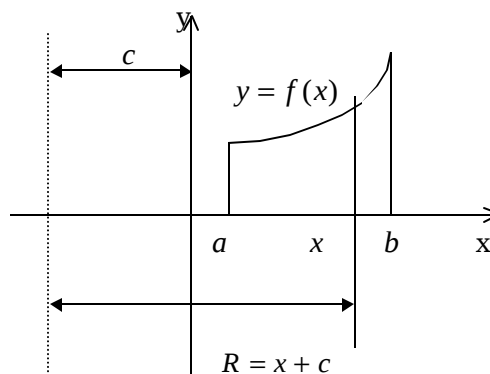
onde $R = f(x) + c$.



B.2 MÉTODO DAS CASCAS CILÍNDRICAS

Aqui o sólido S é gerado pela rotação da região D em torno da reta (eixo) $x = c$. O volume infinitesimal agora é dado por $dV = k[(x + c + dx)^2 - (x + c)^2]f(x) \approx 2k(x + c)f(x)dx$ e o volume de S será dado pela “soma” desses volumes infinitesimais, isto é,

$$\text{vol}(S) = \int_a^b 2p(x + c)f(x)dx.$$



1.35. Em cada caso abaixo esboce a região D delimitada pelas curvas dadas e em seguida calcule o volume do sólido gerado pela rotação da região em torno do eixo indicado:

(a) $y = x^4 - 2x^2, y = 2x^2$; eixo y

(b) $y = x^2 - 4x, y = 0$; eixo x

(c) $y = \sqrt{x}, y = 0, x = 4$; eixo $x = 4$

(d) $x^2 + y^2 = 1$; eixo $x = 2$

(e) $y = \sqrt{x}, y = 0, x = 4$; eixo $y = 2$

(f) $x = y, y = 0, x = 2$; eixo y

(g) $y = x^2, y = 4 - x^2$; eixo x

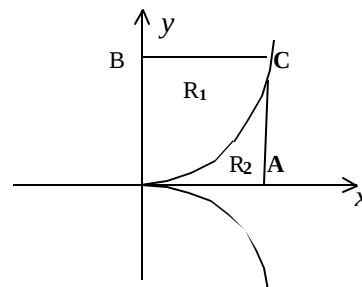
(h) $xy = 1, x = 1, y = 0$; eixo x

1.36. Uma região D do plano xy é delimitada pelo triângulo de vértices $(0,0)$, $(h,0)$, e (h,r) , sendo h e r números positivos. Calcule o volume do sólido resultante da rotação da região D em torno do eixo x . E se a rotação fosse em torno do eixo y ?

1.37. Qual o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo x da região do plano xy exterior à parábola $y = x^2$, limitada pelas retas $y = 2x - 1$ e $y = x + 2$?

1.38. Na figura ao lado a curva indicada tem equação $y^2 = x^3$. Determine o volume do sólido em cada situação a seguir:

- (a) R_2 gira em torno do eixo x ;
- (b) R_2 gira em torno da reta BC ;
- (c) R_1 gira em torno do eixo y ;
- (d) R_1 gira em torno da reta AC .



1.39. É feito um orifício de raio $2\sqrt{3}$ pelo centro de um sólido esférico de raio $R = 4$. Calcule o volume da porção retirada do sólido.

1.40. Calcule o volume de um tronco de cone circular reto de altura h , raio da base inferior R e base superior de raio r .

1.42. Calcule o volume de uma calota determinada numa esfera de raio r por um plano cuja distância ao centro da esfera é $h < r$.

1.43. Calcule pelos dois métodos (Fatias e Cascas Cilíndricas) o volume do sólido obtido por rotação da região do plano xy delimitada pela curva $y = 2x - x^2$ e o eixo x , em torno do eixo y .

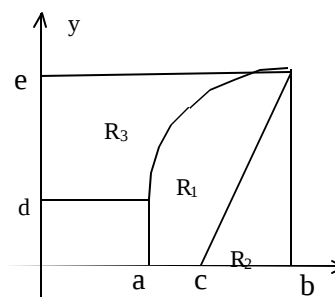
1.44. Ao girar em torno do eixo y uma certa região do plano xy , obteve-se a seguinte expressão para o volume do sólido resultante

$$V = 2p \int_0^{\frac{\pi}{4}} (x \cos x - x \sin x) dx.$$

Indique a região e calcule o volume V .

1.45. Observando a figura ao lado, identifique o sólido de revolução cujo volume é:

- (a) $\int_a^b p f(x)^2 dx$ (b) $\int_c^d p [f^{-1}(y)]^2 dy$ (c) $\int_a^b 2p x f(x) dx$
- (e) $\int_a^b p f(x)^2 dx - \frac{1}{3} p e^2 (b - c)$ (f) $p e^2 b - \int_a^b p f(x)^2 dx - p d^2 a$
- (d) $\int_c^b 2p x f^{-1}(x) dx$



1.46. Calcule o volume do sólido gerado pela rotação em torno da reta $y = x$ da região delimitada pelas retas $y = 0$, $x = 2$ e $x = 2y$ (use rotação de eixos).

1.47. Calcule o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo y do disco delimitado pela circunferência $(x - a)^2 + y^2 = b^2$, $0 < b < a$. Esta superfície é denominada *toro de revolução*. Esboce o gráfico do toro.

B.3. VOLUMES (SÓLIDOS GERAIS)

O Método das Fatias pode ser utilizado no cálculo do volume de um sólido qualquer, quando se conhece a área das seções transversais perpendiculares ao eixo x , por exemplo. De fato, suponhamos que um sólido S é limitado pelos planos $x = a$ e $x = b$ e que $A(x)$ denota a área da seção transversal no ponto x . O volume ΔV da *fatia* compreendida entre x e $x + \Delta x$ é dado por $\Delta V = A(x)\Delta x$, de modo que o volume do sólido S que é a *soma* de todos esses *volumes infinitesimais*, vem dado por

$$\text{vol}(S) = \int_a^b A(x) dx$$

Esta fórmula será utilizada nos exercícios 1.48 a 1.51.

1.48. A base de um sólido é o disco $x^2 + y^2 \leq a^2$. Cada seção transversal do sólido determinada por planos perpendiculares ao eixo x é um quadrado cujo lado está sobre a base do sólido. Calcule o volume do sólido.

1.49. A base de um sólido é a região do plano xy limitada pelo eixo x e pela curva $y = \sin x$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$. Toda seção plana do sólido perpendicular ao eixo x é um triângulo equilátero com um dos lados sobre a base do sólido. Calcule o volume do sólido.

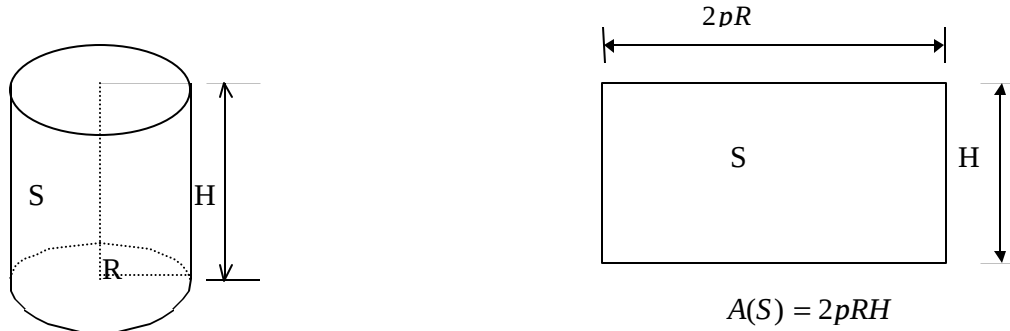
1.50. De um cilindro circular reto de raio r corta-se uma cunha por meio de um plano passando por um diâmetro da base e formando um ângulo de 45° com o plano da base. Calcule o volume da cunha.

1.51. As seções transversais de um sólido por planos perpendiculares ao eixo x são círculos cujos diâmetros estão compreendidos entre as curvas $y = x^2$ e $y = 8 - x^2$. Sabendo-se que o sólido se

encontra entre os planos perpendiculares ao eixo x que passam pelos pontos de interseção dessas curvas, encontre seu volume.

ÁREA DE UMA SUPERFÍCIE DE REVOLUÇÃO

Antes de deduzir a fórmula para o cálculo da área de uma superfície de revolução, vamos calcular de maneira bem simples a área de duas superfícies bastante familiar: o cilindro e o cone circular reto. Para o cilindro de raio R e altura H , quando “cortado e aberto”, sua área é calculada como se ele fosse um retângulo.

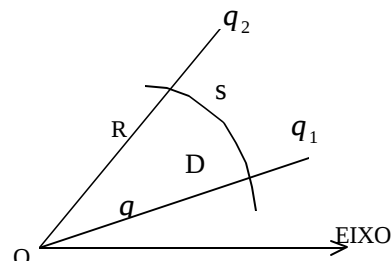


Para o cone adotaremos um procedimento semelhante. Começaremos calculando a área de um setor circular e o comprimento do arco. Considere um círculo de raio R centrado na origem. A circunferência tem equação polar $r = R$, de modo que a área $A(D)$ do setor circular e o comprimento s do arco são dados pelas expressões

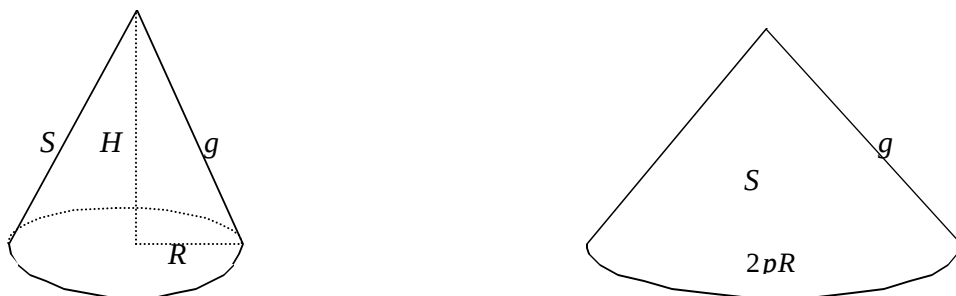
$$A(D) = \int_{q_1}^{q_2} \frac{1}{2} R^2 dq = \frac{1}{2} R^2 q \quad (I)$$

$$s = \int_{q_1}^{q_2} \sqrt{R^2} dq = Rq \quad (II)$$

Combinando (I) e (II), obtemos $A(D) = \frac{1}{2} Rs$.



Considere agora o cone circular reto de altura H , geratriz g e raio da base R , o qual é “cortado e aberto”, conforme mostra a figura abaixo



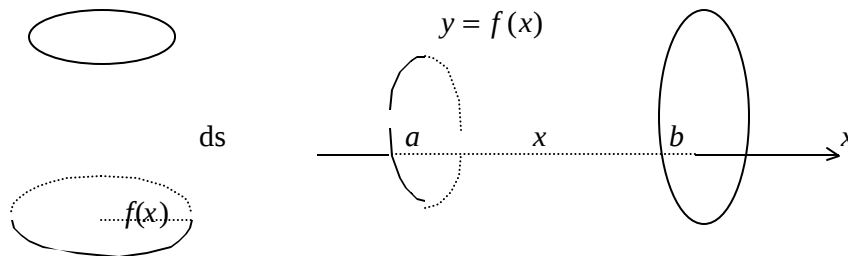
De acordo com a fórmula obtida para a área de um setor circular, se S representa a superfície cônica, deduzimos que

$$A(S) = \frac{1}{2}(2pR)g = pR\sqrt{R^2 + H^2}$$

CASO GERAL

Consideremos uma superfície de revolução S obtida pela rotação, em torno do eixo x , do gráfico de uma função $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, suposta contínua e com primeira derivada contínua. Temos que a área infinitesimal dA pode ser aproximada pela área do cilindro de raio $f(x)$ e altura ds (ds é o comprimento do arco infinitesimal), de modo que a área total da superfície vem dada por

$$A(S) = \int_a^b 2pf(x)ds = \int_a^b 2pf(x)\sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$



1.52. Calcule a área de uma esfera de raio R . [Re sp. $4pR^2$]

1.53. Calcule a área da superfície gerada pela rotação da curva $y = \sqrt{x}$, $1 \leq x \leq 4$, em torno do eixo x . [resp. $\frac{4p}{3} \left\{ (17/4)^{3/2} - (5/4)^{3/2} \right\} \approx 3085$]

1.54. Calcule a área do cone gerado pela rotação do segmento de reta $y = 3x + 2$, $0 \leq x \leq 3$ em torno do eixo x . [resp. $39p\sqrt{10}$]

1.55. A curva $8x = y^4 + 2/y^2$, $1 \leq y \leq 2$, gira em torno do eixo y . Calcule a área da superfície resultante. [resp. $\frac{1179}{256}p$]

1.56. Calcule a área do parabolóide $y = x^2 + z^2$, $0 \leq y \leq 4$ [resp. $\frac{4p}{3} [(17/4)^{3/2} - 1/8] \approx 36.18$]

2. FUNÇÕES, LIMITES e CONTINUIDADE

2.1. Esboce os subconjuntos do plano cartesiano $\mathfrak{R}^2$ dados abaixo, fazendo uma análise topológica dos mesmos. Determine a fronteira e o conjunto dos pontos de acumulação de cada um deles:

$$\begin{array}{lll}
 (a) A = \{(x, y); (x^2 + y^2 - 1)y < 0\} & (b) B = [0, 1] \times [1, 2] & (c) C = \{(x, y); x > 0 \text{ e } y > 0\} \\
 (d) D = \{(x, y); x \geq 0 \text{ e } x^2 + y^2 \leq 1\} & (e) E = \mathfrak{R} \times [1, 2] & (f) F = \{(x, y); |x| + |y| \leq 1\} \\
 (g) G = \{(x, y); x > 0 \text{ e } 1 < y \leq 2\} & (h) H =]1, 2[\times]0, \infty[& (i) I = \{(x, y); x^2 - y^2 \geq 1\} \\
 (j) J = \{(x, y); 1 < x^2 + y^2 \leq 2\} & (k) K = \{(x, y); y \geq 0\} & (l) L = \{(x, y); x^3 < y\} \\
 (m) M = \{(x, y); |x| \leq 1 \text{ e } 1 < y \leq 2\} & (n) N = [0, 1] \times \mathfrak{R} & (o) O = \{(x, y); 4 < x^2 < 9\}
 \end{array}$$

2.2. Encontre os subconjuntos nos quais as expressões abaixo definem funções:

$$\begin{array}{lll}
 (a) f(x, y) = \frac{x^4 y^3}{x^2 + y^4} & (b) f(x, y) = \frac{xy(1 + x^2) + tg x}{\sqrt{x + y^2}} & (c) f(x, y) = \log(1 - 4x^2 - y^2/9) \\
 (d) f(x, y) = \sqrt{\frac{x^2 - 1}{y^2 - 1}} & (e) g(x, y, z) = \sqrt{1 - x^2 + y - z^2} & (f) f(x, y) = \sqrt{\log(x^2 + y^2 - 3)} \\
 (g) f(x, y) = \frac{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}} & (h) h(x, y, z, u) = xu - \sqrt{yz} & (i) f(x, y) = x^2 y + \sqrt{y^2 + 4} - 1/x
 \end{array}$$

2.2. Para cada função dada abaixo, esboce algumas de suas curvas de nível de modo a ter uma idéia do gráfico da função:

$$\begin{array}{lll}
 (a) z = x^2 + y^2 & (b) z = \log(1 + x^2 + y^2) & (c) z = \sqrt{9 - x^2 - y^2} \\
 (d) z = xy & (e) z = \sqrt{x^2 + y^2} & (f) z = \sqrt{1 - x^2/4 - y^2/9} \\
 (g) z = 8 - x^2 - 2y & (h) z = (x^2 + y^2)^{-1} & (i) z = x^2 + y^2 - \sqrt{x^2 + y^2}
 \end{array}$$

2.4. Esboce a curva de nível da função $z = 2y - 4x^3$ que passa pelo ponto (1, 2).

2.5. Identifique as superfícies de nível da função $w = x^2 + y^2 + z^2$, correspondentes $w = 0, 1, 2, 3$.

2.6. Identifique e esboce a superfície de nível da função $j(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$, que passa pelo ponto (1, 1, 1).

2.7. Para a função $f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$, calcule os limites:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h,1) - f(1,1)}{h} \text{ e } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h}.$$

2.8. Verifique se as funções abaixo têm limite na origem:

$$\begin{aligned} (a) z &= \frac{x+y}{x^2+y^2} & (b) z &= \frac{x}{x^2+y^2} & (c) z &= \frac{4xy}{x^2+y^2} & (d) z &= \frac{xy}{(x^2+y^2)^{3/2}} & (e) z &= \frac{xy}{2x^2+3y^2} \\ (f) z &= \frac{xy^2}{x^2+y^4} & (g) z &= \frac{x^6}{(x^3+y^2)^2} & (h) z &= \frac{x^3+y^3}{x^2+y} & (i) z &= \frac{x^2y^2}{x^3+y^3} & (j) z &= \frac{x^4+3xy^2}{x^2+y^2} \end{aligned}$$

2.9. Mostre que a função de três variáveis $f(x,y,z) = \frac{x^2+y^2-z^2}{x^2+y^2+z^2}$ não tem limite na origem.

2.10. Calcule os seguintes limites:

$$\begin{aligned} (a) \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 2}} \log(xy-1) & \quad (b) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{(1-y^2)\sin x}{x} & \quad (c) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{1-\cos\sqrt{xy}}{\sin x \sin y} \\ (d) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin xy}{\sin x \sin y} & \quad (e) \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ y \rightarrow 2}} \arctg(y/x) & \quad (f) \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ y \rightarrow 4}} y\sqrt{x^2+2y} \\ (g) \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow p}} [x \cos(y/4) + 1]^{2/3} & \quad (h) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0 \\ z \rightarrow 0}} z \sin\sqrt{x^2+y^2} & \quad (i) \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 0}} (x^2+y^2)^{2/3} \end{aligned}$$

2.11. Usando a definição de limite prove que:

$$\begin{aligned} (a) \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 3}} (2x+3y) &= 11 & (b) \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 2}} (3x^2+y) &= 5 & (c) \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 3}} (x^2+y^2) &= 10 & (d) \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 3}} (2x^2-3y^2) &= -25 \\ (e) \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 3 \\ z \rightarrow 1}} (2x+3y+z) &= 12 & (f) \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 3}} (2x^2-1) &= 1 & (g) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (2x+3y)\sin(\frac{1}{x}) &= 0 & (h) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} &= 0 \\ (i) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0 \\ z \rightarrow 0}} \frac{xz^2+y^3}{x^2+y^2+z^2} &= 0 & (j) \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow -2}} (x-y^2) &= -3 & (l) \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 2}} \frac{2(x-1)^2(y-2)}{3(x-1)^2+4(y-2)^2} &= 0 \end{aligned}$$

2.12. Mostre que:

$$(a) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{1-\cos\sqrt{xy}}{x} = 0, \quad (b) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin(x^2+y^2)}{1-\cos\sqrt{x^2+y^2}} = 2 \quad (c) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{|x|+|y|}{x^2+y^2} = +\infty$$

2.13. Para a função $f(x, y) = \frac{3x^4 y^4}{(x^4 + y^2)^3}$, calcule o limite na origem ao longo dos caminhos: eixo x , reta $y = x$, curva $y = -x^4$. O que você pode concluir sobre o limite da função na origem?

2.14. Verifique se a função dada é contínua no ponto indicado:

$$(a) f(x, y) = \exp(-xy) \log(x^2 - 2y + 7); P_0 = (0, 0) \quad (b) f(x, y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2}; P_0 = (-3, 4)$$

$$(c) f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{y - 2x}, & \text{se } y \neq 2x \\ 1, & \text{se } y = 2x \end{cases}; P_0 = (1, 2) \quad (d) f(x, y, z) = \frac{xz}{x^2 + y^2 + z^2}; P_0 = (0, 0, 0).$$

2.15. Para cada função abaixo esboce seu domínio máximo de definição e expressando-a em termos de funções elementares justifique sua continuidade.

$$(a) f(x, y) = \sqrt{xy} \quad (b) f(x, y) = \frac{4x^2 - y^2}{2x - y} \quad (c) f(x, y) = \frac{x}{1 - y^2} \quad (d) f(x, y) = \frac{4x^2 y}{2x^2 + y^2}$$

$$(e) f(x, y) = \arcsen\left(\frac{y}{x}\right) \quad (f) f(x, y) = \log(xy - 2) \quad (g) f(x, y) = \frac{4x^2 - y^2}{2x - y} + \arccos(|x| + |y|)$$

2.16. Discuta a continuidade das seguintes funções:

$$(a) f(x, y, z) = \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2, & \text{se } x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \\ 0, & \text{se } x^2 + y^2 + z^2 > 1 \end{cases} \quad (b) g(x, y) = \begin{cases} 4x^2 + 9y^2, & \text{se } 4x^2 + 9y^2 \leq 1 \\ (4x^2 + 9y^2)^{-1}, & \text{se } 4x^2 + 9y^2 > 1 \end{cases}$$

$$(c) h(x, y, z) = \begin{cases} \frac{\sin(x + y)}{x + y}, & \text{se } x + y \neq 0 \\ z, & \text{se } x + y = 0 \end{cases} \quad (d) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x - y}, & \text{se } x \neq y \\ x - y, & \text{se } x = y \end{cases}$$

$$(e) f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{xz - y^2}{x^2 + y^2 + z^2}, & \text{se } (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y, z) = (0, 0, 0) \end{cases} \quad (f) f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{se } x^2 + y^2 > 4 \\ 0, & \text{se } x^2 + y^2 \leq 4 \end{cases}$$

2.17. Considere g e h funções definidas em $\mathbb{R}^2$ por

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{3x^2 y}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad h(x, y) = \begin{cases} \frac{x y}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Mostre que $(0, 0)$ é uma descontinuidade removível da função g e essencial da função h .

2.18. Mostre que a função $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2+y^2)}{1-\cos(x^2+y^2)}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ é descontínua na origem. É esta descontinuidade essencial ou removível?

2.19. Considere a função $f(x,y) = \frac{xy(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)}$, se $(x,y) \neq (0,0)$ e $f(0,0) = 0$. Defina a função g pela expressão $g(x,y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}$. Calcule $g(0,0)$, $g(1,0)$ e $g(0,1)$.

2.20. Mostre que a função definida em $\mathbb{R}^2$ por $f(x,y) = \begin{cases} \exp(-\frac{1}{x^2+y^2}), & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ é contínua em todos os pontos do $\mathbb{R}^2$. Calcule os limites $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h,0)}{h}$ e $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0,h)}{h}$.

2.21. Considere a função $f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^3}$, se $(x,y) \neq (0,0)$ e $f(0,0) = 1$.

- (a) Calcule o limite de f na origem, ao longo de um feixe de retas passando pela origem;
- (b) Calcule o limite de f na origem, ao longo do caminho $y = -x^{\frac{2}{3}}e^x$;
- (c) Calcule o limite de f na origem, ao longo do caminho $r = \cos^2 q$, $-\frac{p}{2} \leq q \leq 0$;
- (d) Estude a continuidade de f .

3. DERIVADAS, DIFERENCIABILIDADE e APLICAÇÕES

A. DERIVADAS PARCIAIS

3.1. Para cada função dada abaixo, calcule as derivadas $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ e $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$:

$$\begin{array}{lll} (a) z = 3x^2 - 5xy^3 - \sin(xy) & (b) z = (x - \sqrt{y})(x^2 + y^2) & (c) \sqrt[3]{xy - x^2y^2 + y^4} \\ (d) z = \arctg\left(\frac{y}{x}\right) & (e) z = \frac{x}{y} \exp(x^2 + y^2) & (f) z = \frac{1}{x} \log(1 - x^2 - y^2) \end{array}$$

3.2. Para cada função abaixo, calcule a derivada parcial indicada:

$$\begin{array}{ll} (a) f(x, y) = x \arcsen(x - y); f_x(1, 1/2) & (b) f(x, y) = e^{xy} \sec(x/y); f_y(3, 4) \\ (c) f(x, y) = \arctg\left(\frac{x+y}{x}\right); f_{xy}(1, 1) \text{ e } f_{yx}(1, 1) & (d) f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{1 + x^2 + y^2}; f_x(0, 0) \text{ e } f_y(0, 0) \end{array}$$

3.3. Para a função $f(x, y) = \exp\left(\frac{-1}{x^2 + y^2}\right)$, se $(x, y) \neq (0, 0)$, e $f(0, 0) = 0$, calcule, caso existam, as derivadas $f_x(0, 0)$, $f_y(0, 0)$, $f_{xy}(0, 0)$ e $f_{yx}(0, 0)$.

$$3.4. \text{ Considere a função } f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- (a) Mostre que $f_{xy}(0, 0) \neq f_{yx}(0, 0)$;
 (b) Estude a continuidade das derivadas f_x e f_y na origem.

3.5. Mostre que as derivadas parciais de 1ª ordem da função $z = \sqrt{|xy|}$ embora existam em todo ponto (x, y) do $\mathbb{R}^2$, com $x \neq 0$, $y \neq 0$, não são contínuas na origem.

3.6. Considere três funções reais $j(t)$, $x(t)$ e $y(t)$, deriváveis até 2ª ordem e satisfazendo às condições $j''(x) + l^2 j(x) = 0$ e $y''(t) + c^2 l^2 y(t) = 0$, sendo l constante. Mostre que as funções $u(x, t) = j(x)y(t)$ e $v(x, t) = x(x - ct)$ satisfazem a “equação linear de ondas” $w_{tt} - c^2 w_{xx} = 0$.

3.7. Mostre que a função $u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4kt}\right)$, $t > 0$, $k = \text{cte}$, satisfaz a “equação de transmissão de calor” $w_t - kw_{xx} = 0$.

3.8. O “Operador Laplaciano” Δ em $\mathbb{R}^2$ é definido por $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$. Mostre que as funções $u(x, y) = \arctg(y/x)$ e $u(x, y) = e^x \cos y$ satisfazem a equação de Laplace $\Delta u = 0$.

3.9. Determine condições sobre as constantes A, B, C, D, E, e F para que a função $u(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F$ satisfaça a equação de Laplace.

3.10. Sejam $u(x, y)$ e $v(x, y)$ funções com derivadas parciais contínuas até 2ª ordem e satisfazendo as equações $u_x = v_y$ e $u_y = -v_x$. Mostre que u e v satisfazem a equação de Laplace.

3.11. Mostre que $w = x^2y + y^2z + z^2x$ satisfaz a equação $\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = (x + y + z)^2$.

B. REGRA DA CADEIA

3.12. Considere as funções $f(x, y) = \int_x^y \log(1 + \sin^2 t) dt$ e $g(x, y) = \int_x^{x^2y} \exp(\cos t) dt$. Usando o Teorema Fundamental do Cálculo e a Regra da Cadeia, calcule as derivadas de segunda ordem f_{xy} e g_{xy} .

3.13. Se $f(x, y) = \sin\left(\frac{x}{y}\right) + \log\left(\frac{y}{x}\right)$, mostre que $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 0$.

3.14. Seja $f(x, y) = \frac{\sqrt{x^2 + 2xy + y^2}}{x + y}$ definida no aberto $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x + y \neq 0\}$. Mostre que f_x e f_y são identicamente nulas em D, mas f não é constante.

3.15. Considere uma função real derivável $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e a partir dela defina as seguintes funções $j(x, y) = f(x - y)$ e $y(x, y) = f(xy)$. Mostre que as funções j e y satisfazem $j_x + j_y = 0$ e $xy_x - yy_y = 0$.

3.16. Calcule $\frac{dz}{dt}$ nos seguintes casos:

(a) $z = ye^x + xe^y$; $x = t$ e $y = \sin t$

(b) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$; $x = \tan(1+t)$ e $y = \cos t$

(c) $z = \log(x^2 + y^2 + 1)$; $x = \log t$ e $y = e^t$

(d) $z = u^2v + w^2v + uvw^3$; $u = t^2$, $v = t$ e $w =$

3.17. Em cada caso abaixo, calcule as derivadas w_x e w_y :

(a) $w = u^2 + v^3$; $u = 3x - y$ e $v = x + 2y$

(b) $w = \log(t^2 + s^2)$; $t = x^3 + y^2$ e $s = 2x + 3xy$

(c) $w = \cosh(3u + 7v)$; $u = x^2y$ e $v = \sqrt{xy}$

(d) $w = \cos(x + h)$; $x = x + y$ e $h = \sqrt{xy}$.

3.18. Para a função $f(x, y) = \int_x^y \exp(t^2) dt$ e admitindo que $x = rs^4$ e $y = r^4s$, calcule as derivadas

$$\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial r} \text{ e } \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial s}.$$

3.19. Se $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$ e $r = \|\vec{r}\|$, mostre que $z = f(r)$ satisfaz a equação $\Delta z = z_{rr} + \frac{1}{r}z_r$, onde a função real f é suposta duas vezes derivável.

3.20. Admitindo a existência e continuidade das derivadas envolvidas e considerando $w = f(u)$ e $u = g(x, y)$, mostre que $\Delta w = f''(u)[g_x^2 + g_y^2] f'(u)\Delta g$.

3.21. Uma função $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é dita “homogênea de grau n ” quando satisfaz a relação $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $\forall (x, y) \in D$. Mostre que toda função homogênea de grau n satisfaz a equação

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = n f(x, y).$$

Verifique que as seguintes funções são homogêneas

$$(a) z = x^2 + y^2 \qquad (b) z = (x^2 - 3xy + y^2)(2x^2 + 3y^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

3.22. Admita que as derivadas parciais de primeira ordem das funções u e v são contínuas em um domínio D e que neste domínio valem as relações $u_x = v_y$ e $u_y = -v_x$. Se $x = r \cos q$ e $y = r \sin q$, prove que

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial q} \text{ e } \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial q}.$$

3.23. Admitindo a continuidade das derivadas parciais de primeira ordem das funções u e v e supondo válida a relação $e^u + u^2 + uv = 0$, prove que

$$\frac{\partial u}{\partial x} e^u + 2u \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

C.

DIFERENCIABILIDADE

$$\textbf{3.24.} \text{ Considere a função } f(x, y) = \begin{cases} \frac{3x^2 y}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

(a) Prove que f é contínua na origem;

(b) Prove que as derivadas parciais f_x e f_y existem na origem, mas aí estas funções não são contínuas;

(c) Verifique que f não é diferenciável na origem. Por que isto não contradiz o Lema Fundamental?

3.25. Discuta a veracidade das seguintes afirmações:

- (a) Toda função diferenciável possui derivadas parciais de 1ª ordem contínuas;
 (b) Toda função diferenciável é contínua;
 (c) Se uma função de duas variáveis possui derivadas parciais de primeira ordem, então ela é contínua.

3.26. Usando o Lema Fundamental, verifique que as funções dadas a seguir são diferenciáveis nos domínios indicados:

$$\begin{array}{ll} (a) z = x^2 y^4; D = \mathbb{R}^2 & (b) z = \log(x^2 + y^2); D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ (c) z = \frac{xy}{x^2 + y^2}; D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} & (d) z = \frac{e^{xy}}{x-y}; D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x \neq y\} \end{array}$$

3.27. Verifique que a função

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \operatorname{sen} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

é diferenciável na origem, embora as derivadas parciais f_x e f_y sejam aí descontínuas.

3.28. Estude a diferenciabilidade da função dada no ponto indicado:

$$\begin{array}{ll} (a) f(x, y) = xe^{-y}; P_0 = (1, 0) & (b) f(x, y) = |xy^2|; P_0 = (0, 1) \\ (c) f(x, y) = \sqrt{|y|} \cos x; P_0 = (0, 0) & (d) f(x, y) = \sqrt{|x|(1+y^2)}; P_0 = (x, y) \\ (e) f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}; P_0 = (0, 0) & (f) f(x, y, z) = |xyz|; P_0 = (1, 1, 1) \\ (g) f(x, y) = \begin{cases} \frac{3xy}{x^2 + y^2} & ; P_0 = (1, 2) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases} & (h) f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{xy}, & \text{se } x \neq 0 \text{ e } y \neq 0 \\ 1, & \text{se } x = 0 \text{ ou } y = 0 \end{cases}; P_0 = (0, 0) \end{array}$$

3.29. Calcule a diferencial das seguintes funções:

$$\begin{array}{ll} (a) f(x, y) = 5x^3 + 4x^2 y - 2y^3 & (b) f(x, y, z) = e^x yz \\ (c) f(x, y) = x \operatorname{sen} \frac{y}{x^2 + 1} & (d) f(x, y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) \end{array}$$

3.30. Seja $f(x, y, z) = \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2}$, se $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ e $f(0, 0, 0) = 0$. Verifique que as derivadas parciais de primeira ordem de f embora existam na origem, f não é aí diferenciável.

3.31. Se f é uma função diferenciável de duas variáveis e $z = f(x - y, y - x)$, mostre que $z_x + z_y = 0$.

D. APLICAÇÕES

3.32. Encontre as equações paramétricas da reta tangente à curva dada, no ponto indicado:

$$(a) \begin{cases} 3x - 5y - z + 7 = 0 \\ y = 2 \end{cases} \quad P_0(1, 2, 0)$$

$$(b) \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 14 \\ x = 1 \end{cases} \quad P_0(1, 3, 2)$$

$$(c) \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ x = 1 \end{cases} \quad P_0(1, 1, \sqrt{2})$$

$$(d) \begin{cases} z = 2xy(x^2 + y^2)^{-1} \\ y = 4 \end{cases} \quad P_0(3, 4, \frac{24}{25})$$

3.33. Uma função diferenciável $z = f(x, y)$ satisfaz as condições: $f(1, 2) = 3$, $f_x(1, 2) = 5$ e $f_y(1, 2) = 8$. Encontre valores aproximados para $f(1.1, 1.8)$, $f(1.3, 1.8)$.

3.34. Usando diferencial, calcule o valor aproximado de $\sin[1.99 \log(1.03)]$ e $\sqrt{4.02} + \sqrt[3]{8.03}$.

3.35. Um tanque cilíndrico metálico tem altura de 1,2 m e raio de 80 cm em suas dimensões internas. Se a espessura das paredes é de 5 mm, calcular a quantidade aproximada de metal usada na fabricação do tanque. [resp. $50.265,6 \text{ cm}^3$ com erro da ordem 23×10^{-6}]

3.36. Dois lados de uma área triangular medem $x=200 \text{ m}$ e $y=220 \text{ m}$, com possíveis erros de 10 cm. O ângulo entre eles é de 60° , com possível de 1° . Calcule o erro aproximado da área triangular [resp. $210,15 \text{ m}^2$]

3.37. Um observador vê o topo de uma torre sob um ângulo de elevação de 30° , com um possível erro de $10'$. Sua distância da torre é de 300 m, com um possível erro de 10 cm. Qual a altura aproximada da torre e seu possível erro? [resp. $h = \frac{300}{\sqrt{3}} \text{ m}$ e o erro $1,2756 \text{ m}$. Usar $10' = 0,003 \text{ rad}$]

3.38. As dimensões de uma caixa retangular são 5m, 6m e 8m. Se cada dimensão aumenta de 0,01m, qual é aproximadamente o volume resultante?

3.39. Duas resistências r_1 e r_2 estão conectadas em paralelo, isto é, a resistência equivalente R é dada por $\frac{1}{R} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$. Supondo que $r_1=30 \text{ ohms}$ e aumenta de 0,03 ohms e $r_2=50 \text{ ohms}$ e diminui de 0,05 ohms, calcule a variação resultante de R . [resp. $3/640$]

3.40. O comprimento l e o período T de um pêndulo simples estão relacionados pela equação $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$. Se o valor de l é calculado para $T = 1 \text{ seg}$ e $g = 32 \text{ pes/s}^2$, determine o erro cometido se na realidade $T = 1,02 \text{ seg}$ e $g = 32,01 \text{ pes/s}^2$. [resp. $\frac{1,29}{4\pi^2} \cong 4\%$]

3.41. Uma indústria vai produzir dez mil caixas de papelão, fechadas, com dimensões 3 dm, 4 dm e 5 dm. O custo do papelão a ser usado é de R\$ 0,05 por dm^2 . Se as máquinas usadas no corte do

papelão cometem erro de 0,05 dm em cada dimensão, determine o erro aproximado na estimativa do custo do papelão. [resp. R\$ 1.200,00]

3.42. Uma caixa sem tampa vai ser fabricada com madeira de 0,6 cm de espessura. As dimensões internas da caixa sendo 60 cm de comprimento, 30 cm de largura e 40 cm de altura, calcule a quantidade aproximada de madeira usada na fabricação da caixa.

E. DERIVADA DIRECIONAL e GRADIENTE

3.43. Calcule a derivada direcional da função $z = f(x, y)$ no ponto P_0 , na direção indicada:

- (a) $z = x^3 + 5x^2y$; $P_0 = (2,1)$ na direção da reta $y = x$;
 (b) $z = ye^{xy}$; $P_0 = (0,0)$ na direção do vetor $\vec{v} = 4\vec{i} + 3\vec{j}$.
 (c) $z = x^2 - y^2$; $P_0 = (2,3)$ na direção tangente à curva $2x + 5y^2 = 15$ em $(0, \sqrt{3})$.

3.44. Calcule $\frac{\nabla f}{\|\vec{u}\|}(P_0)$ nos seguintes casos:

- (a) $f(x, y, z) = e^{-y} \sin x + \frac{1}{3}e^{-3y} \sin 3x + z^2$; $P_0 = (\frac{\pi}{3}, 0, 1)$ e $\vec{u} = -\frac{1}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} + \frac{1}{2}\vec{k}$.
 (b) $f(x, y, z) = x^2y + 3yz^2$; $P_0 = (1, -1, 1)$ e $\vec{u} = \frac{1}{3}\vec{i} - \frac{2}{3}\vec{j} + \frac{2}{3}\vec{k}$.
 (c) $f(x, y, z) = \log(x^2 + y^2 + z^2)$; $P_0 = (1, 1, 1)$ e $\vec{u} = \frac{2}{3}\vec{i} + \frac{1}{3}\vec{j} + \frac{2}{3}\vec{k}$.

3.45. Calcule o valor máximo da derivada direcional da função, no ponto indicado:

- (a) $w = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1}$; $P_0 = (1, 2, -3)$. (b) $w = e^x \cos(yz)$; $P_0 = (1, 0, p)$.

3.46. Seja $z = f(x, y)$ uma função diferenciável em cada ponto do círculo $x^2 + y^2 = 1$. Mostre que a derivada direcional de f no ponto (x, y) na direção da tangente ao círculo é $-yf'_x + xf'_y$.

3.47. Encontre o plano tangente e a reta normal à superfície dada, no ponto indicado:

- (a) $z = x^2 - y^2$; $P_0 = (1, 1, 0)$ (b) $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$; $P_0 = (1, 1, 1)$
 (c) $z = x\sqrt{x^2 + y^2}$; $P_0 = (3, -4, 15)$ (d) $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$; $P_0 = (-1, 2, 2)$

3.48. Seja c a curva no espaço descrita pelas equações $x = \sin t$, $y = \sin t$, $z = \cos 2t$.

- (a) Determine a reta tangente e o plano normal à curva c no ponto correspondente a $t = \frac{\pi}{4}$.
 (b) Mostre que a curva c está contida na superfície de equação $x^2 + y^2 + z = 1$.

3.49. Determine em cada caso ∇f e verifique diretamente que este vetor é normal às curvas ou superfícies de nível:

(a) $f(x, y) = x^2 + y^2$

(b) $f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 - xz$.

3.50. Seja $f(x, y, z) = 3x + 5y + 2z$ e denote por $\vec{v}$ o campo de vetores normais exteriores à esfera de equação $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. Calcule a derivada direcional $D_{\vec{v}} f(x, y, z)$.

3.51. Calcule a derivada direcional no ponto $P_0 = (3, 4, 5)$ da função $w = x^2 + y^2 + z^2$, na direção da tangente à curva $\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 0 \\ 2x^2 + 2y^2 - z^2 = 25 \end{cases}$ no ponto considerado.

3.52. Considere a função $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$ se $(x, y) \neq (0, 0)$ e $f(0, 0) = 0$. Mostre que a função f tem derivada direcional na origem em qualquer direção, mas não é aí diferenciável.

3.53. Admitindo as operações possíveis e considerando l constante, prove as seguintes regras do cálculo:

$$(a) \nabla(af + g) = a\nabla f + \nabla g, \quad (b) \nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f \quad (c) \nabla(f/g) = [1/g^2](g\nabla f - f\nabla g).$$

3.54. Seja $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ o vetor posição do ponto $P = (x, y, z)$ e denote por r sua norma. Dada uma função real derivável $f(t)$, mostre que

$$\nabla f(r) = f'(r) \frac{\vec{r}}{r}.$$

Como consequência calcule $\nabla(r)$, $\nabla\left(\frac{1}{r}\right)$ e $\nabla(\log r)$.

3.55. Sejam $0 < a < 1/2$ e $f(x, y) = (xy)^a$. Mostre que $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$ e que f não possui derivada em qualquer outra direção, na origem.

3.56. Encontre a reta tangente a curva dada no ponto indicado:

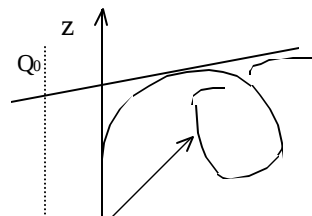
$$(a) \begin{cases} 3x^2 + y^2 + z - 4 = 0 \\ x^2 - y^2 - z^2 + 12 = 0 \end{cases}; P_0 = (1, 2, -3) \quad (b) \begin{cases} 3xy + 2yz + 6 = 0 \\ x^2 - 2xz + y^2z - 1 = 0 \end{cases}; P_0 = (1, -2, 0)$$

3.57. Calcule a derivada no ponto $P_0 = (1, 2, 3)$ da função $w = 2x^2 - y^2 + z^2$, na direção da reta que passa pelos pontos $A = (1, 2, 1)$ e $B = (3, 5, 0)$.

3.58. Considere as funções diferenciáveis $f(x, y)$ e $g(x, y)$ tais que $f_x = g_y$ e $f_y = -g_x$ e denote por $\nabla_a f$ a derivada direcional de f na direção do vetor $\cos a \vec{i} + \sin a \vec{j}$. Prove que $\nabla_a f = \nabla_{a+\frac{\pi}{2}} g$ e $\nabla_{a+b} f = \cos b \nabla_a f + \sin b \nabla_{a+\frac{\pi}{2}} f$.

3.59. Considere a curva de equações paramétricas $x = t$, $y = t^2$ e $z = t^3$, $-\infty < t < \infty$.

(a) Encontre a reta tangente e o plano normal no ponto $(2, 4, 8)$;



(b) Encontre a reta tangente que passa pelo ponto $P_0 = (0, -1, 2)$;

P_0 y

(c) Existe reta tangente passando no ponto $Q_0 = (0, -1, 3)$?

x

3.60. Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivável com $f'(t) \neq 0, \forall t$. Se $g(x, y) = f(x^2 + y^2)$, mostre que a derivada direcional $D_{\vec{v}} g(x, y)$ será máxima quando $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

3.61 Se $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função derivável, mostre que os planos tangentes à superfície de equação $z = yf(y/x)$ passam todos pela origem.

3.62. Encontre o plano tangente à superfície $z = 2x^2 + y^2 - 3xy$ que é paralelo ao plano de equação $10x - 7y - 2z + 5 = 0$.

F. APLICAÇÕES

3.63. A temperatura T no ponto (x, y) de uma placa metálica circular com centro na origem é dada por $T(x, y) = 400 / (2 + x^2 + y^2)$ °C. Qual a direção que se deve tomar a partir do ponto $A(1, 1)$ de modo que T aumente o mais rápido possível e com que velocidade T aumenta ao se passar pelo ponto A ? [resp. $-\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$; $50\sqrt{2}$ °C/cm]

3.64. Um ponto P se move ao longo de uma curva c em um campo escalar diferenciável $w = f(x, y, z)$ a uma velocidade ds/dt . Se $\vec{T}$ é o vetor tangente à curva c , prove que a taxa instantânea de variação de w em relação ao tempo, no ponto P , é $(\vec{T} \cdot \nabla w) \frac{ds}{dt}$.

3.65. A superfície de um lago é representada por uma região D do plano xy , de modo que a profundidade (em metros) sob o ponto (x, y) é $f(x, y) = 300 - x^2 - y^2$.

(a) Em que direção um bote em $P(4, 9)$ deve navegar para que a profundidade da água decresça mais rapidamente?

(b) Em que direção a profundidade permanece a mesma?

3.66. A análise da temperatura T de cada componente é fundamental para o planejamento de um *chip* de computador. Suponhamos que, para que um *chip* opere adequadamente, a temperatura de cada componente não deva exceder 78° F. Se um componente tende a aquecer, os engenheiros costumam colocá-lo em uma parte fria do *chip*. O planejamento de *chip* é auxiliado por simulação em computador, em que se analisam os gradientes da temperatura. Uma simulação para um novo *chip* resultou na malha de temperaturas (em ° F) exibida na tabela ao lado

(a) Use as relações $f_x(a,b) \approx \frac{1}{2h}[f(a+h,b) - f(a-h,b)]$

e $f_y(a,b) \approx \frac{1}{2h}[f(a,b+h) - f(a,b-h)]$ e calcule o valor aproximado de $\nabla T(3,3)$;

(b) Estime a direção da transferência máxima de calor no ponto (3,3);

(c) Estime a taxa instantânea de variação de T em (3,3), na direção $\vec{v} = -\vec{i} + 2\vec{j}$

y (mm)

	62	62	65	63	61
6	62	67	69	65	64
5	63	70	70	69	67
4	65	66	72	74	76
3	61	67	73	80	75
2	60	60	71	76	72
1	60	60	63	65	69
	1	2	3	4	

3.67. A superfície $z = \frac{1}{5280}(x^3 - 2y^2)$ representa um terreno irregular e um grupo de turistas está situado na origem. Um turista grego parte para Meca, indo diretamente para o leste, ao longo da direção positiva do eixo x. Se ele viaja a uma velocidade constante de 3 km/h, qual sua velocidade de descida, ao fim de uma hora?

3.68. A temperatura num ponto (x,y) de uma placa retangular é $T(x,y) = x \sin 2y$. O ponto P se move, no sentido horário, ao longo do círculo unitário centrado na origem, a uma velocidade constante de duas unidades de comprimento de arco por seg. Qual a velocidade de variação da temperatura no ponto $P = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$?

4. MÁXIMOS e MÍNIMOS

4.1. Encontre e classifique os pontos críticos de cada função dada abaixo:

$$\begin{array}{lll}
 (a) \ z = xy & (b) \ z = 1 - x^2 - 2y^2 & (c) \ z = xy^2 + x^2y - xy \\
 (d) \ z = x^2 - xy + y^2 & (e) \ z = x^2 + 2xy + 3y^2 + 4x + 6y & (f) \ z = \log(xy) - 2x - 3y \\
 (g) \ z = \frac{1}{3}x^3 + \frac{4}{3}y^3 - 3x - 4y - 3 & (h) \ z = x^4 + y^3 + 32x - 9y & (i) \ z = \frac{1}{2}x^4 - 2x^3 + 4xy + y^2
 \end{array}$$

4.2. Encontre o máximo e o mínimo (absolutos) em D de cada função dada abaixo:

$$\begin{array}{ll}
 (a) \ z = xy ; D: 2x^2 + y^2 \leq 1 & (b) \ z = x + y ; D: [-1,1] \times [-1,1] \\
 (c) \ z = (x^2 + y^2)^{-1} ; D: (x-2)^2 + y^2 \leq 1 & (d) \ z = xe^{-x} \cos y ; D: [-1,1] \times [-p, p]
 \end{array}$$

4.3. Mostre que no domínio $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 0 \text{ e } y > 0\}$ a função do ex 4.1 (f) não tem mínimo. Qual o maior valor que z assume em D? Dê exemplo de uma função contínua em D que não possui máximo nem mínimo.

4.4. Encontre os pontos da curva $x = \cos t$, $y = \sin t$ e $z = \sin(t/2)$ mais distantes da origem.

4.5. Quais das seguintes funções tem máximo ou mínimo em todo plano $\mathbb{R}^2$?

$$\begin{array}{lll}
 (a) \ z = \exp(x^2 - y^2) & (b) \ z = \exp(-x^2 - y^2) & (c) \ z = (x + 2y) \exp(x^2 - y^4) \\
 (d) \ z = e^x + e^y - e^{x+y} & (e) \ z = x^2 - 2x(\sin y + \cos y) & (f) \ z = (x^2 + y^2)(|x| + |y|)^{-1}, z(0,0) = 0
 \end{array}$$

4.6. Encontre o(s) ponto(s) da superfície de equação $z = xy + 2$ mais próximo(s) da origem.

4.7. Encontre a menor distância da origem à curva $y^2 = (x-1)^3$. Porque o método dos multiplicadores de Lagrange não funciona neste caso?

4.8. Pelo método dos multiplicadores de Lagrange, resolva os seguintes problemas de extremos vinculados:

$$\begin{array}{ll}
 (a) \ z = 3x + 4y ; x^2 + y^2 = 1 & (b) \ z = \cos^2 x + \cos^2 y ; x - y = \frac{\pi}{4}, 0 \leq x \leq \pi \\
 (c) \ z = x + y ; x^{-1} + y^{-1} = 1 & (d) \ z = xy + yz + xz ; x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\
 (e) \ z = x + y + z ; x^2 + y^2 + z^2 = 1 & (f) \ z = xyz ; x + y + y + z + x + z = 2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \\
 (g) \ z = x^2 + y^2 ; x^4 + y^4 = 1 & (h) \ z = (x + y + z)^2 ; x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1
 \end{array}$$

4.9. Calcule a distância mínima do ponto $P_0 = (1,0)$ à parábola $y^2 = 4x$.

4.10. Ache a menor e a maior distância da origem à curva de equação $5x^2 + 5y^2 + 6xy = 1$.

4.11. Seja c a curva interseção do elipsóide $x^2 + 4y^2 + 4z^2 = 1$ com o plano $x - 4y - z = 0$. Encontre o ponto da curva c mais próximo da origem.

4.12. Encontre 3 números positivos cuja soma seja 5 e seu produto seja o maior possível.

4.13. Prove que: se x, y e z são números reais não negativos, então $\sqrt[3]{xyz} \leq \frac{1}{3}(x + y + z)$.

4.14. Encontre o ponto do parabolóide $z = x^2 + y^2$ mais próximo do ponto $(3, -6, 4)$.

4.15. Encontre o ponto da elipse $x^2 + 4y^2 = 16$ mais próximo da reta $x - y - 10 = 0$.

4.16. Calcule o maior valor assumido pela função $f(x, y) = \sin x \sin y \sin(x + y)$ na região compacta $R: 0 \leq x \leq p; 0 \leq y \leq p; 0 \leq x + y \leq p$.

4.17. Encontre os extremos da função $z = 8x^3 - 3xy + y^3$ no quadrado $Q: [0, 1] \times [0, 1]$.

4.18. Calcule o maior valor da expressão $x(y + z)$, quando $x^2 + y^2 = 1$ e $xz = 1$.

4.19. Determine o mínimo da função $f(x, y, z, t) = z^2 + 2x^2 + y^2 + 2t^2$, sujeita às condições $x + y + z - t = 1$, $2x + y - z + 2t = 2$ e $x - y + z - t = 4$.

4.20. Determine e identifique os pontos críticos da função $f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + z^2$, sujeita à condição $x^2 yz = 1$.

4.21. Calcule a distância da parábola $y = x^2 + 1$ à reta $y = x - 2$.

4.22. Calcule a distância da superfície $z = x^2 + y^2 + 10$ ao plano $3x + 2y - 6z - 6 = 0$.

PROBLEMAS DE MÁXIMOS e MÍNIMOS

4.23. A temperatura T no disco $x^2 + y^2 \leq 1$ é dada por $T(x, y) = 2x^2 + y^2 - y$. Em que ponto do disco a temperatura é mais alta e em que ponto ela é mais baixa?

4.24. A temperatura T no ponto P da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ é dada por $T(P) = 100xy^2z$. Em que ponto da esfera a temperatura é máxima? Em que ponto ela é mínima?

4.25. Uma caixa retangular sem tampa deve ter 32 m³ de volume. Determine suas dimensões de modo que sua área total seja mínima.

4.26. Determine o volume da maior caixa retangular com lados paralelos aos planos coordenados que pode ser colocada dentro do elipsóide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

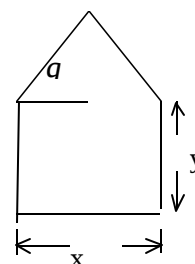
4.27. Encontre a reta que melhor se ajusta aos dados (1,3), (2,7) e (3,8). Utilize o Método dos Mínimos Quadrados: seja $f(x) = ax + b$ a reta procurada e determine a e b que minimizam a função $E(a, b) = \sum_{i=1}^3 [f(x_i) - y_i]^2$. Esta reta é denominada “Regressão Linear”.

4.28. De todos os paralelepípedos retângulos com mesmo volume, mostre que o de menor área é o cubo.

4.29. Dentre os triângulos com perímetro p , mostre que o equilátero é o que possui área máxima. [sug. a área é $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, onde $p = 2s = a + b + c$]

4.30. Um paralelepípedo retângulo possui 3 de suas faces nos planos coordenados. Seu vértice oposto a origem está no plano $4x + 3y + z = 36$ e no primeiro octante. Ache esse vértice de modo que o paralelepípedo tenha volume máximo.

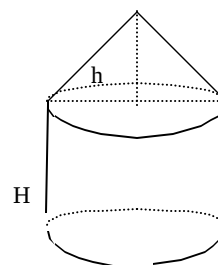
4.31. Uma janela tem a forma de um retângulo superposto por um triângulo isóceles, conforme mostra a figura ao lado. Se o perímetro da janela é 12 m, calcule x, y e q de modo que a janela tenha área máxima.



4.32. Uma indústria planeja fabricar caixas retangulares de 8 m^3 de volume. Determine as dimensões que minimizem o custo, se o material para a tampa e o fundo custa o dobro do material para os lados.

4.33. Calcule o volume da maior caixa retangular que tem três de seus vértices no primeiro octante sobre os eixos x, y e z e um quarto vertice no plano de equação $2x + 3y + 4z = 12$.

4.34. Uma tenda é projetada na forma de um cilindro circular reto com teto de forma cônica, como mostra a figura ao lado. Se o cilindro tem raio 5m e área total da superfície que envolve a tenda é 100m^2 , calcule a altura H do cilindro e a altura h do cone de modo que a tenda tenha maior espaço interno.



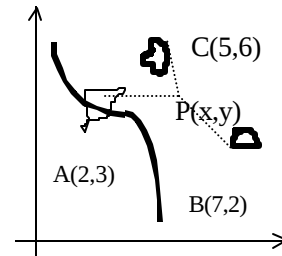
4.36. Três componentes elétricos de um computador estão localizados em $A(0,0)$, $B(4,0)$ e $C(0,4)$. Determine a posição de um quarto componente de modo que a demora do sinal seja mínima.

4.37. A tabela a seguir relaciona as médias semestrais e as notas do exame final de dez alunos de CálculoII, período 96.1.

Média Semestral	4,0	5,5	6,2	6,8	7,2	7,6	8,0	8,6	9,0	9,4
Exame Final	3,0	4,5	6,5	7,2	6,0	8,2	7,6	9,2	8,8	9,8

Ajuste uma reta a esses dados para estimar a nota do exame final de um aluno cuja média semestral seja 7,0.

4.38. A figura ao lado exibe a posição relativa de três cidades A, B e C. Urbanistas pretendem aplicar o método dos mínimos quadrados (veja ex. 4.28) para decidir onde construir uma nova escola que atenda às três comunidades. A escola será construída em um ponto $P(x,y)$ tal que a soma dos quadrados das distâncias das cidades A, B e C à escola seja mínima. Determine a posição relativa do local da construção.



4.39. Três genes A, B e O determinam os quatro tipos sanguíneos humanos: A(AA ou AO), B(BB ou BO), O(OO) e AB. A lei de *Hardy-Weinberg* afirma que a proporção de indivíduos de uma população que são portadores de dois genes diferentes é dada pela fórmula $P=2pq+2pr+2rq$, onde p , q e r são as proporções de genes A, B e O, respectivamente, na população. Prove que P não deve exceder $\frac{2}{3}$. Note que p , q e r são não negativos e $p+q+r=1$.

4.40. A resistência de uma viga retangular varia como o produto de sua largura pelo quadrado de sua profundidade. Ache as dimensões da viga de maior resistência que pode ser cortada de um toro cilíndrico cujas seções transversas são elípticas, com eixos maior e menor medindo 24 cm e 16 cm, respectivamente.

5. FUNÇÕES IMPLÍCITAS e TRANSFORMAÇÕES

(5.1. Em cada caso abaixo verifique a validade do Teorema da Função Implícita e calcule y' e y'' :

(a) $y^3 + xy + x^2 - 3 = 0$; $P_0 = (2,1)$

(b) $\log(xy) + xy^2 - 1 = 0$; $P_0 = (1,1)$

(c) $x \log x + ye^y = 0$; $P_0 = (1,1)$

(d) $\log(xy) - 2xy + 2 = 0$; $P_0 = (1,1)$

5.2. Use o Teorema da Função Implícita e calcule $\frac{dx}{dy}$ no ponto especificado:

(a) $y^3 + x^3 - \cos(xy) = 0$; $P_0 = (1,0)$

(b) $x^2 + y^2 + \log(x^2 + y^2) - 1 = 0$; $P_0 = (1,0)$

5.3. Determine $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$, onde $z = f(x, y)$ é definida pela equação:

(a) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

(b) $xy(1+x+y) - z^2 = 0$

(c) $xz^2 - 3yz + \cos z = 0$

5.4. Resolva o sistema
$$\begin{cases} u + v + \sin(xy) = 0 \\ 3u + 2v + x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$
 para obter u e v como funções de x e y .

5.5. Usando a lei $PV = kT$ para um gás ideal, prove a relação $\frac{\partial P}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial P} = -1$.

5.6. Considere a equação $F(x, y, z) = 0$, sendo F uma função diferenciável de três variáveis. Se num ponto P_0 tem-se $F(P_0) = 0$, $F_x(P_0) \neq 0$, $F_y(P_0) \neq 0$ e $F_z(P_0) \neq 0$, mostre que $\frac{\partial x}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = -1$.

5.7. Calcule o Jacobiano das seguintes transformações:

(a)
$$\begin{cases} u = 2x - y \\ v = x + 4y \end{cases}$$

(b)
$$\begin{cases} u = 3x + 2y \\ v = x - y \end{cases}$$

(c)
$$\begin{cases} u = e^x - y \\ v = x + 5y \end{cases}$$

(d)
$$\begin{cases} x = r \cos q \\ y = r \sin q \end{cases}$$

(e)
$$\begin{cases} u = 2x + y \\ v = 2y - z \\ w = 3x \end{cases}$$

(f)
$$\begin{cases} u = x \cos y - z \\ v = x \sin y + 2z \\ w = x^2 + y^2 \end{cases}$$

(g)
$$\begin{cases} x = r \cos q \\ y = r \sin q \\ z = z \end{cases}$$

(h)
$$\begin{cases} x = r \sin j \cos q \\ y = r \sin j \sin q \\ z = r \cos j \end{cases}$$

5.8. Admitindo a continuidade das derivadas envolvidas, prove que:

(a) $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = 1$

(b) $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \frac{\partial(u, v)}{\partial(z, w)} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(z, w)}$

5.9. Sabendo que
$$\begin{cases} x^2 - y \cos(uv) + z^2 = 0 \\ x^2 + y^2 - \sin(uv) + 2z^2 = 2 \\ xy - \sin u \cos v + z = 0 \end{cases}$$
 calcule as derivadas $\frac{\partial x}{\partial u}$ e $\frac{\partial y}{\partial v}$ no ponto de coordenadas $x = 1, y = 1, z = 0, u = \frac{\pi}{2}$, e $v = 0$.

5.10. Admitindo que o sistema
$$\begin{cases} u^3 - 2u - v - 3 = 0 \\ x^2 + y^2 - u - 4 = 0 \end{cases}$$
 define u e v como funções de x e y , calcule as derivadas $\frac{\partial v}{\partial x}$ e $\frac{\partial v}{\partial y}$, no ponto onde $x=1$ e $y=2$.

5.11. Admitindo que o sistema
$$\begin{cases} x^2 - xt - y^2 t^2 - y + 2s + 2 = 0 \\ y^2 - 2yt + xt^2 - ys + s^2 - 6 = 0 \end{cases}$$
 define x e y como funções de s e t , calcule as derivadas $\frac{\partial x}{\partial s}, \frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial s}$ e $\frac{\partial y}{\partial t}$, no ponto onde $x=2$ e $y=0$.

5.12. Considere a transformação $T(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$ com Jacobiano $J \neq 0$. Mostre as seguintes regras de derivação: $u_x = \frac{1}{J} y_v$, $u_y = -\frac{1}{J} x_v$, $v_x = -\frac{1}{J} y_u$, $v_y = \frac{1}{J} x_u$.

5.13. Considere a transformação $T(u, v, w) = (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))$ com Jacobiano $J \neq 0$. Mostre que $u_x = \frac{1}{J} \frac{\partial(y, z)}{\partial(v, w)}$, $u_y = -\frac{1}{J} \frac{\partial(x, z)}{\partial(v, w)}$. Obtenha expressões análogas para as outras sete derivadas de primeira ordem restantes.

5.14. Mostre que a mudança de coordenadas
$$\begin{cases} x = x + ct \\ h = x - ct \end{cases}$$
 transforma a equação de ondas $u_{xx} - \frac{1}{c^2} u_{tt} = 0$ na equação simplificada $u_{xh} = 0$.

5.15. Mostre que a transformação $T(x, y) = (ax + by, cx + dy)$ transforma o quadrado de vértices $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, e $(0,1)$ num paralelogramo no plano uv , cuja área é $|J(T)|$.

5.16. Verifique que a transformação $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$; $T(x, y) = \left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}\right)$ aplica a elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ na circunferência unitária de centro na origem. Encontre uma transformação $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que aplica o elipsóide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ na esfera unitária de centro na origem.

5.17. Qual a imagem da circunferência $x^2 + y^2 = a^2$ pela transformação $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (4x, y)$?

5.18. Determine as imagens das retas $x = c$ pela transformação $T(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$.

5.19. Esboce no plano xy a região delimitada pelas parábolas $x^2 = y$, $x^2 = 2y$, $y^2 = x$ e $y^2 = 2x$. Determine a imagem desta região pela mudança de coordenadas $x^2 = uy$, $y^2 = vx$.

5.20. Determine a imagem da região $|x| + |y| \leq 1$ pela transformação $T(x, y) = (x + y, x - y)$.

5.21. Seja $f(t)$ uma função real de uma variável com derivada contínua e positiva. Mostre que a transformação $T(u, v) = (f(u), -v + uf(u))$ é invertível e sua inversa é a transformação $G(x, y) = (f^{-1}(x), -y + xf^{-1}(x))$.

5.22. Em cada caso abaixo é dada uma mudança de coordenadas $(u, v) = T(x, y)$. Descreva as curvas $u = c$ e $v = c$ nos dois sistemas (plano- xy e plano- uv) para os valores $c = -2, -1, 0, 1, 2$, e determine a transformação inversa:

- | | | |
|----------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|
| (a) $T(x, y) = (3x, 5y)$ | (b) $T(x, y) = (x - y, 2x + 3y)$ | (c) $T(x, y) = (x^3, x + y)$ |
| (d) $T(x, y) = (x + 1, 2 - y^3)$ | (e) $T(x, y) = (e^x, e^y)$ | (f) $T(x, y) = (e^{2y}, e^{-3})$ |

5.23. Em cada caso abaixo encontre a imagem da curva c pela transformação $T(x, y)$:

- | | |
|---|--|
| (a) c é o retângulo de vértices $(0,0)$, $(0,1)$, $(2,1)$, e $(2,0)$ | $T(x, y) = 3x + 5y$ |
| (b) c é o círculo $x^2 + y^2 = 1$ | $T(x, y) = 3x + 5y$ |
| (c) c é o triângulo de vértices $(0,0)$, $(3,6)$, e $(9,4)$ | $T(x, y) = (\frac{1}{2}y, \frac{1}{3}x)$ |
| (d) c é a reta $3x - 2y = 4$ | $T(x, y) = (\frac{1}{2}y, \frac{1}{3}x)$ |
| (e) c é a reta $x + 2y = 1$ | $T(x, y) = (x - y, 2x + 3y)$ |
| (f) c é o quadrado de vértices $(0,0)$, $(1,-1)$, $(2,0)$ e $(1,1)$ | $T(x, y) = (5x + 4y, 2x - 3y)$ |
| (g) c é o círculo $x^2 + y^2 = 1$ | $T(x, y) = (5x + 4y, 2x - 3y)$ |

5.24. Seja T a Transformação de Kelvin $(u, v) = (\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2})$, $(x, y) \neq (0,0)$.

- (a) Mostre que as curvas $u = cte$ e $v = cte$ no plano- xy são círculos ortogonais;
 (b) Mostre que T é a reflexão no círculo $x^2 + y^2 = 1$ e encontre T^{-1} .

COORDENADAS CILÍNDRICAS E COODENADAS ESFÉRICAS

As quantidades r, q, z definidas no exercício 5.7 (g) são denominadas “coordenadas cilíndricas”, enquanto r, q, j definidas em 5.7 (h) são as “coordenadas esféricas”. Temos

COORDENADAS CILÍNDRICAS

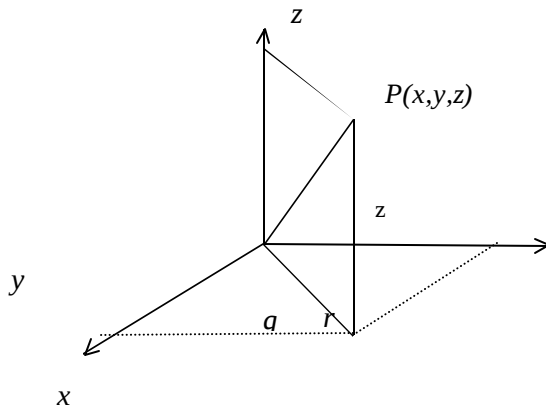
$$\begin{cases} x = r \cos q \\ y = r \sin q \\ z = z \end{cases}$$

COORDENADAS ESFÉRICAS

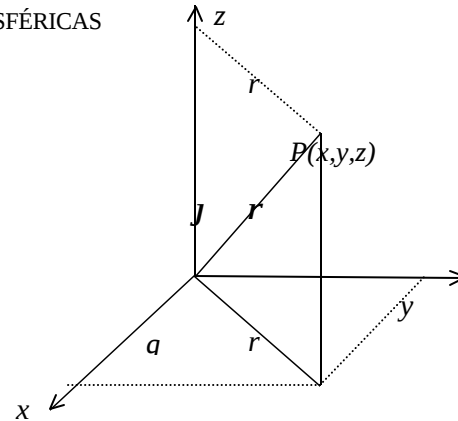
$$\begin{cases} x = r \sin j \cos q \\ y = r \sin j \sin q \\ z = r \cos j \end{cases}$$

Geometricamente, temos a seguinte configuração:

CILÍNDRICAS



ESFÉRICAS



5.25. Complete a seguinte tabela de coordenadas:

cartesianas	cilíndricas	esféricas
$(2, 2, -1)$		
		$(12, p/6, 3p/4)$
$(1, 1, -2\sqrt{2})$	$(1, p/4, 1)$	

5.26. Identifique a superfície cuja equação em coordenadas cilíndricas é:

(a) $r = 4$ (b) $q = p/4$ (c) $z = 2r$ (d) $3r^2 + z^2 = 9$ (e) $r^2 + z^2 = 16$ (f) $r \sec q = 4$

5.27. Identifique a superfície cuja equação em coordenadas esféricas é:

(a) $r = 6 \cos q \sin j$ (b) $r = 5 \operatorname{cosec} j$ (c) $q = p/6$ (d) $r \sin j = 4$
 (e) $j = p/4$ (f) $r^2 - 3r = 0$ (g) $r \sin j \cos q = 1$ (h) $r = 2 \cos j$
 (i) $\tan q = 4$ (j) $r = a$ (l) $r^2 + 3r + 2 = 0$ (m) $r = \operatorname{cosec} j \cot q$

5.28. As superfícies dadas abaixo estão representadas por suas equações cartesianas. Passe as equações para as coordenadas cilíndricas e esféricas:

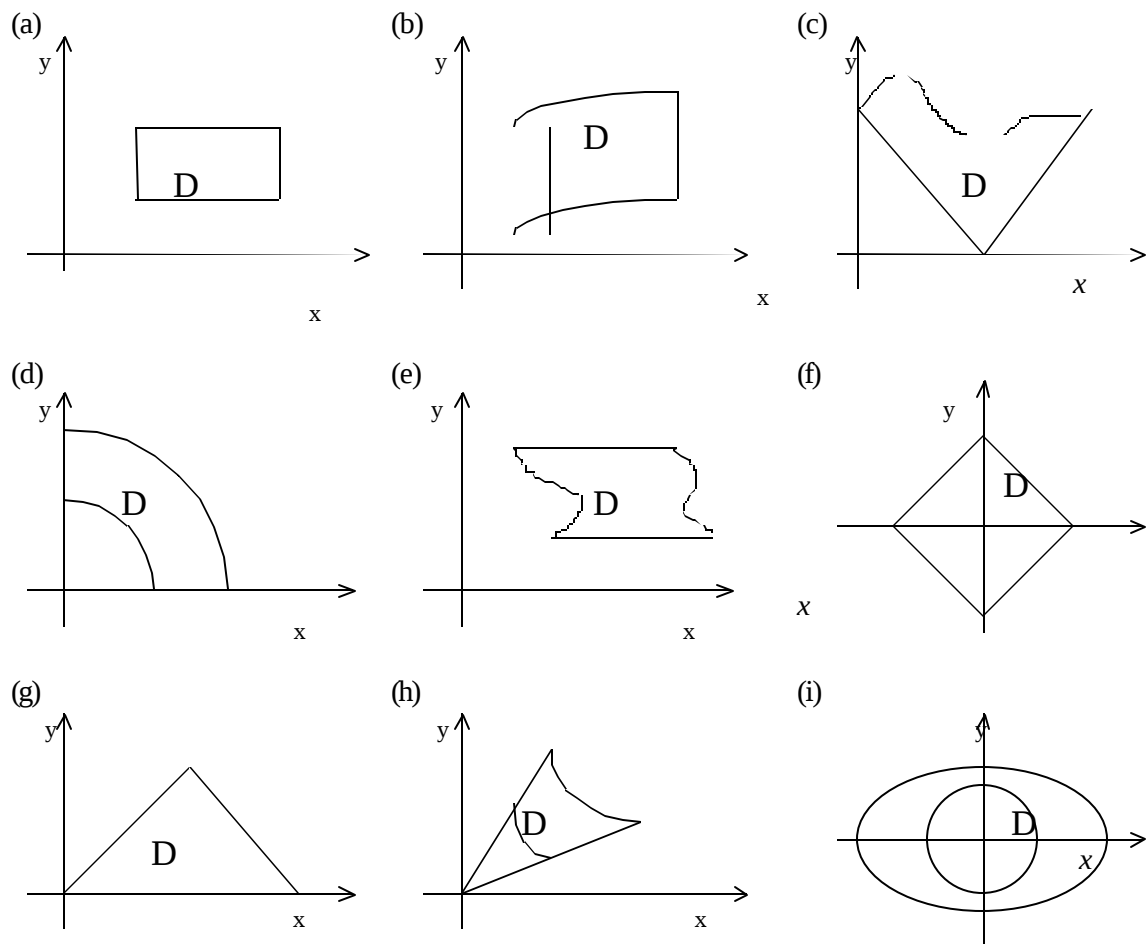
(a) Esfera : $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ (b) Parabolóide : $4z = x^2 + y^2$
 (c) Cone : $x^2 - 4z^2 + y^2 = 0$ (d) Hiperbolóide : $x^2 - 4y^2 - z^2 = 1$
 (e) Plano : $3x + y - 4z = 12$ (f) Cilindro : $x^2 + y^2 = 4$

6. INTEGRAÇÃO MÚLTIPLA

6.1. INTEGRAL DUPLA

A. INTEGRAIS ITERADAS

6.1. Cada figura abaixo representa uma região D do plano xy , sobre a qual se deseja calcular a integral dupla $\iint_D f(x,y)dA$. Por observação da figura escreva a integral dupla como uma integral iterada de modo a obter o cálculo mais simples:



6.2. Calcule as seguintes integrais iteradas. Em cada caso esboce a região de integração e inverta a ordem. Compare o grau de dificuldade no cálculo da integral nas duas ordens possíveis:

(a) $\int_0^3 \int_1^2 (12xy^2 - 8x^3) dy dx$

(b) $\int_0^2 \int_0^2 (2xy - y^3) dy dx$

(c) $\int_1^2 \int_0^1 (x - 3 \log y) dx dy$

(d) $\int_0^2 \int_1^3 |x - 2| \sin y dx dy$

(e) $\int_0^p \int_{-y}^y \sin x dx dy$

(f) $\int_0^p \int_0^x \cos x^2$

$$\begin{array}{lll}
 (g) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x \cos y - y \cos x) dy dx & (h) \int_0^3 \int_{1-x}^{\sqrt{x}} xy dy dx & (i) \int_0^1 \int_{x^2}^x e^{y/x} dy dx \\
 (j) \int_0^1 \int_0^{|x|} dy dx & (l) \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y dy dx & (m) \int_0^p \int_0^{\cos y} x \sin y dx dy \\
 (n) \int_1^2 \int_{x^2}^{x^3} xy dy dx & (o) \int_0^1 \int_0^x x \sin y dy dx & (p) \int_0^1 \int_0^x e^{x^2} dy dx \\
 (q) \int_0^{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{4-2y^2}}^{\sqrt{4-2y^2}} y dx dy & (r) \int_0^2 \int_1^{e^x} dy dx & (s) \int_0^9 \int_{\sqrt{y}}^3 \sin x^3 dx dy \\
 (t) \int_{-2}^1 \int_{x^2+4x}^{3x+2} dy dx & (u) \int_0^{\sqrt{2}/2} \int_y^{\sqrt{1-y^2}} xy dx dy & (v) \int_0^4 \int_{-\sqrt{4-y}}^{(y-4)/2} xy dy dx
 \end{array}$$

6.3. Em cada caso abaixo esboce a região D e calcule a integral dupla $\iint_D f(x, y) dx dy$. Escolha a ordem de integração de modo a simplificar o cálculo da integral iterada:

$$\begin{array}{ll}
 (a) D: 0 \leq x \leq 1 \text{ e } 2x \leq y \leq 2; f = e^{y^2} & (b) D: x \geq 0 \text{ e } 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2; f = x^2 \\
 (c) D: -1 \leq x \leq 2 \text{ e } -\sqrt{4-x^2} \leq y \leq 4-x^2; f = 1 & (d) D: 0 \leq y \leq 8 \text{ e } \sqrt[3]{y} \leq x \leq 2; f = xy
 \end{array}$$

6.4. Nos casos a seguir, esboce a região D descrita e calcule a integral dupla $\iint_D f(x, y) dA$. Se necessário utilize uma mudança de coordenadas:

$$\begin{array}{ll}
 (a) D \text{ é a região triangular de vértices } (2, 9), (2, 1) \text{ e } (-2, 1); & f = xy^2 \\
 (b) D \text{ é a região retangular de vértices } (-1, -1), (2, -1), (2, 4) \text{ e } (-1, 4); & f = 2x + y \\
 (c) D \text{ é a região delimitada por } 8y = x^3, y - x = 4 \text{ e } 4x + y = 9; & f = x \\
 (d) D \text{ é a região do 1º quadrante delimitada por } x^2 + y^2 = 1; & f = \sqrt{1-x^2-y^2} \\
 (e) D \text{ é a região triangular de vértices } (0, 0), (1, -1) \text{ e } (-1, 4); & f = \sqrt{x^2-y^2} \\
 (f) D \text{ é a região delimitada por } y^2 = x, x = 0 \text{ e } y = 1; & f = \exp(x/y) \\
 (g) D \text{ é a região delimitada por } y = \frac{1}{2}x^2 \text{ e } y = x; & f = x(x^2 + y^2)^{-1} \\
 (h) D \text{ é a região delimitada por } y = x, y = 0, x = 8 \text{ e } xy = 16; & f = 1 \\
 (i) D \text{ é a região delimitada por } y = e^x, y = \log x, x + y = 1, \text{ e } x + y = 1 + e; & f = 1 \\
 (j) D \text{ é a região delimitada por } y = x^2, y = 0 \text{ e } y = -x + 2; & f = xy
 \end{array}$$

6.5. Usando coordenadas polares, calcule as seguintes integrais:

$$\begin{array}{ll}
 (a) \int_0^2 \int_{\sqrt{2y-y^2}}^{\sqrt{2y-y^2}} x dx dy & (d) \int_1^2 \int_0^x (x^2 + y^2)^{-1} dy dx \\
 (b) \int_{-a}^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \exp(-x^2 - y^2) dy dx & (e) \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dA, D: 0 \leq x \leq 3 \text{ e } 0 \leq y \leq x. \\
 (c) \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (x^2 + y) dA & (f) \iint_D (x + y) dA, D \text{ é o interior de } x^2 + y^2 = 2y
 \end{array}$$

6.6. Usando a mudança de variáveis $u = x + y$, $v = x - y$, calcule a integral dupla $\iint_{|x|+|y| \leq p} (x + y)^2 \sin^2(x - y) dA$.

6.7. A fronteira da região D é o quadrado de vértices $(0,1)$, $(1,2)$, $(2,1)$ e $(1,0)$. Usando a mudança de variáveis do exercício 6.6, calcule a integral dupla sobre D da função $f(x,y) = (x-y)^2 \cos^2(x+y)$.

6.8. Usando a mudança de variáveis do exercício 6.6 calcule $\iint_D \sin\left(\frac{x-y}{x+y}\right) dA$, onde D é a região compacta delimitada pelo trapézio de vértices $(1,1)$, $(2,2)$, $(4,0)$ e $(2,0)$.

6.9. Usando a mudança de variáveis $u = vx$ e $y = v$ calcule $\iint_D (x^2 + 2y^2) dA$, onde D é a região delimitada pelas curvas $xy = 1$, $xy = 2$, $y = |x|$ e $y = 2x$.

6.10. Usando a mudança de variáveis $x = v + u$ e $y = v - u^2$, calcule $\iint_D (4x - 4y + 1)^{-2} dA$, onde D é a região delimitada pelas curvas $x = \sqrt{-y}$, $x = y$ e $x = 1$.

6.11. Usando a mudança de variáveis $u = \frac{1}{2}y$ e $v = x - 2y$ calcule $\iint_D (\sqrt{x-2y} + \frac{1}{4}y^2) dA$, onde D é a região delimitada pelo triângulo de vértices $(0,0)$, $(4,0)$ e $(4,2)$.

6.12. Calcule a integral de $f(x,y) = x^2$ na região delimitada pela cardióide $r = 1 - \cos \theta$.

B. ÁREAS e VOLUMES

6.13. Por integração dupla calcule a área de um círculo de raio R e a área da elipse de semi-eixos a e b .

6.14. Em cada caso abaixo, calcule por integração dupla a área da região plana D delimitada pelas curvas indicadas:

(a) $x = 1, x = 2, y = -x^2$ e $y = 1/x^2$

(b) $x = 1, x = 4, y = -x$ e $y = \sqrt{x}$

(c) $y = x^2$ e $y = 1/(1+x^2)$

(d) $y^2 = -x, x - y = 4, y = -1$ e $y = 2$

(e) $y = 0, x + y = 3a$ e $y^2 = 4ax, a > 0$

(f) $y = e^x, y = \sin x, x = p$ e $x = -p$

6.15. Por integração dupla, calcule a área da região D compreendida entre a cardióide $r = a(1 + \sin \theta)$ e o círculo $r = a$.

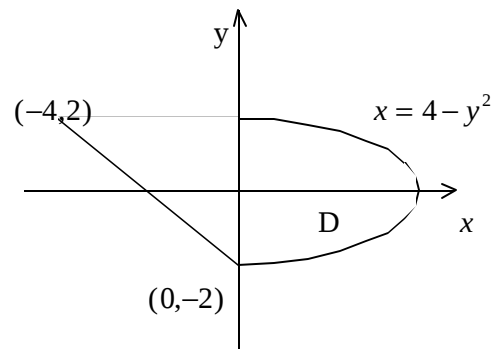
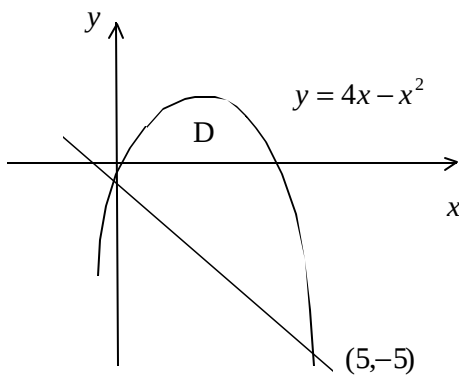
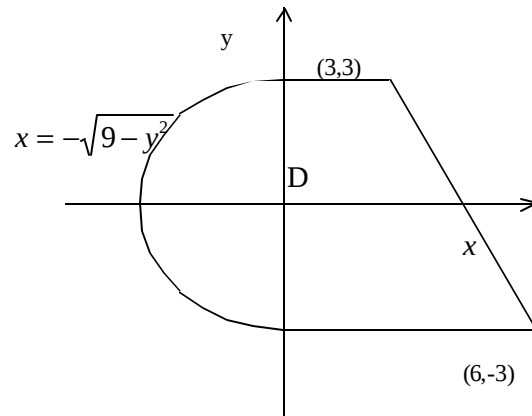
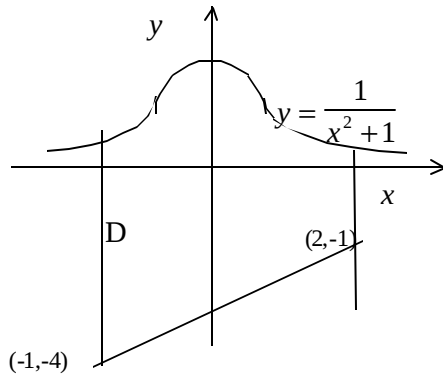
6.16. Calcule a área da região delimitada pelas parábolas $x^2 = y, x^2 = 2y, y^2 = x$ e $y^2 = 2x$.

6.17. Calcule a área da região delimitada pelas retas $y = x$ e $y = 0$ e pelos círculos $x^2 + y^2 = 2x$ e $x^2 + y^2 = 4x$.

6.18. Calcule a área da região delimitada pelas parábolas $y^2 = 10x + 25$ e $y^2 = -6x + 9$.

6.19. A expressão $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_1^{1+\cos q} r dr dq$ representa o valor da área de uma certa região. Esboce graficamente a região e calcule o valor da área.

6.20. Usando integral dupla, calcule a área da região D indicada na figura:

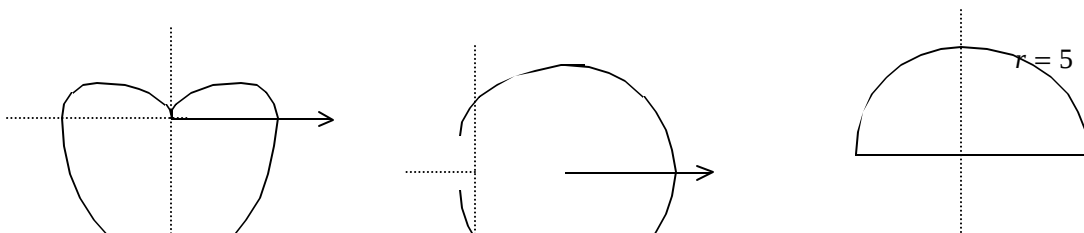


6.21. Calcule a área da região do primeiro quadrante delimitada pelas retas $y = x$, $y = 0$ e $x = 8$, e pela curva $xy = 16$.

6.22. Usando coordenadas polares, calcule a integral dupla $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dA$, onde D é a região do plano xy delimitada pelas curvas $y = \sqrt{2x - x^2}$ e $y = x$.

6.23. Por integral dupla, calcule a área de um laço da curva de equação $r^2 = 9 \cos 2\theta$.

6.24. Expresse a área da região D indicada como uma integral dupla iterada em coordenadas polares:



$$\begin{array}{ccc}
 & & D \\
 & & r = 4 \cos \theta \cos \phi \\
 D & & A \\
 & D & \\
 & & A \left(5, \arctg \frac{4}{3} \right) \\
 r = 3 - \sin \theta & r = 1 + 2 \cos \theta &
 \end{array}$$

- 6.25.** Calcule o volume do sólido delimitado pelos planos $x = 0, y = 0, z = 0$ e $x + y + z = 1$.
- 6.26.** A base de um sólido é a região do plano xy delimitada pelo disco $x^2 + y^2 \leq a^2$. A parte superior é a superfície do parabolóide $az = x^2 + y^2$. Calcule seu volume.
- 6.27.** Calcule o volume do sólido limitado inferiormente pelo plano xy , nas laterais delimitado pelas superfícies $y = 4 - x^2$ e $y = 3x$ e cuja parte superior jaz no plano $z = x + 4$.
- 6.28.** Ao calcular o volume de um sólido S abaixo de um parabolóide e acima de uma certa região D do plano xy , obteve-se a seguinte expressão

$$vol(S) = \int_0^1 \int_0^y (x^2 + y^2) dx dy + \int_1^2 \int_0^{2-y} (x^2 + y^2) dx dy.$$

Indique a região D , exprima $vol(S)$ por uma integral iterada com a ordem invertida e em seguida calcule a integral.

- 6.29.** Calcule o volume da região comum aos cilindros $x^2 + y^2 = a^2$ e $x^2 + z^2 = a^2$.
- 6.30.** Um sólido S do primeiro octante tem seu volume dado pela expressão

$$vol(S) = \int_0^1 \int_0^{1-x} (1 - x - y) dy dx.$$

Esboce graficamente o sólido e calcule o valor do seu volume. Idem para

$$vol(S) = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (1-x) dy dx.$$

- 6.31.** Calcule o volume do sólido limitado pelo cilindro $x^2 + z^2 = 1$, e pelos planos $y = 0, z = 0$, e $y = x$.
- 6.32.** Calcule o volume do sólido limitado pelo plano $z = 0$, pelo cilindro $x^2 + y^2 = 2x$ e pelo cone $x^2 + y^2 = z^2$.
- 6.33.** Calcule o volume do sólido interior à esfera de centro na origem e raio 5, e exterior ao cilindro $x^2 + y^2 = 9$.

- 6.34.** Calcule o volume do sólido interior ao cubo $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1$, e exterior ao parabolóide $x^2 + y^2 = z$.
- 6.35.** Calcule o volume do sólido limitado pelos planos $y = 1$ e $z = 0$, pelo parabolóide $x^2 + y^2 = z$ e pelo cilindro $y = x^2$.
- 6.36.** Verifique que o parabolóide $x^2 + y^2 = z$, divide o cilindro de equação $x^2 + y^2 = 4, 0 \leq z \leq 4$, em dois sólidos de volumes iguais.
- 6.37.** Calcule o volume do “pedaço” do elipsóide $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 16$ cortado pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$.
- 6.38.** Calcule o volume da maior região interior à esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ e ao cilindro circular $x^2 + y^2 = 4y$.
- 6.39.** Um sólido é limitado pela superfície $x^2 + y^2 = z$ e pelos planos $z = 0, x = 1$ e $x = 3$. Calcule seu volume.

C. MASSA, MOMENTOS e CENTRO DE MASSA

- 6.40.** Calcule a massa de um disco de raio a , se a densidade é proporcional ao quadrado da distância a um ponto da circunferência.
- 6.41.** Uma lâmina tem a forma de um triângulo retângulo isósceles com lados iguais de comprimento a . A densidade de massa por área em cada ponto da lâmina é diretamente proporcional ao quadrado distância do ponto ao vértice oposto à hipotenusa. Determine o centro de massa.
- 6.42.** Uma lâmina tem a forma da região D do plano xy delimitada pela parábola $x = y^2$ e pela reta $x = 4$. A densidade de massa por área no ponto P é proporcional a distância do ponto ao eixo-y. Determine o centro de massa da lâmina.
- 6.43.** Determine a massa, as coordenadas do centro de massa e os momentos de inércia I_x, I_y e I_o para a lâmina que tem a forma da região D indicada e cuja densidade de massa por área é $d(x, y)$:
- (a) $y = \sqrt{x}, x = 9, y = 0; d = x$ (b) $y = \sqrt[3]{x}, x = 8, y = 0; d = y^2$ (c) $y = x^2, y = 4; d = ky$
- 6.44.** Uma lâmina homogênea tem o formato de um quadrado de lado a . Determine o momento de inércia em relação a um lado, em relação a uma diagonal e em relação ao centro de massa.

D. INTEGRAIS DUPLAS IMPRÓPRIAS

Nas integrais que aparecem no exercício (6.44) ou a região de integração D não é limitada ou, sendo D compacta, a função que se deseja integrar possui uma singularidade essencial em algum ponto da fronteira de D . Em qualquer um destes casos a integral será denominada “imprópria”.

6.45. Calcular as seguintes integrais impróprias:

$$\begin{array}{lll}
 \text{(a)} \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{dx dy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{(b)} \iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{xy}}; D: 0 < x, y \leq 1 & \text{(c)} \iint_D x^2 e^{-x^2-y^2} dx dy; D: x \geq 0, y \geq 0 \\
 \text{(d)} \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{dx dy}{\sqrt{1-x^2-y^2}} & \text{(e)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{\frac{2}{3}} \sin^2 y}{(1+x^2+y^2)^2} dx dy & \text{(f)} \iint_D e^{xy} dx dy; D: 0 \leq x \leq y^2, 0 \leq y \leq 1 \\
 \text{(g)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2} dx dy & \text{(h)} \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \ln \sqrt{x^2+y^2} dx dy & \text{(i)} \iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{|x-y|}}; D: 0 \leq x, y \leq 1.
 \end{array}$$

6.46. Usando o resultado do exercício 6.45 (g), mostre que $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx = 1$.

[sugestão: use o fato que $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2} dx dy = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy \right) = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt \right)^2$.]

6.47. Mostre que a função $f(x, y) = 1/(x-y)$ não é integrável no domínio $D: 0 \leq y < x \leq 1$, embora seja contínua neste domínio. Isto contradiz algo resultado do Cálculo que você conhece?

E. ÁREA DE UMA SUPERFÍCIE

A integral dupla pode ser utilizada para calcular a área de uma superfície S que representa o gráfico de uma função diferenciável $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$. A área de S é dada por

$$A(S) = \iint_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dA.$$

6.48. Calcule a área da superfície de equação $z = f(x, y)$, descrita por:

$$\begin{array}{ll}
 \text{(a)} z = 3 + x - 2y; 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x & \text{(b)} z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}; 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2 \\
 \text{(c)} z = xy; x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0 & \text{(d)} z = 3 - x^2 - y^2; x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0
 \end{array}$$

6.49. Calcule a área da porção da superfície de equação $z = y + \frac{1}{2}x^2$ que se encontra acima do quadrado do plano xy de vértices $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ e $(0,1)$.

6.50. Corta-se uma parte do plano $x + y + z = 1$ pelo cilindro $x^2 + y^2 = 2$. Determine a área da parte cortada.

6.51. Calcule a área da porção do cilindro $x^2 + z^2 = 9$ interior ao cilindro $x^2 + y^2 = 9$.

6.52. Uma tenda em forma de cúpula deve ter o chão circular com raio de 5 metros e teto na forma do parabolóide $z = 7 - \frac{7}{25}(x^2 + y^2)$. Calcule a quantidade de material necessária para construir a tenda.

6.53. Seja $z = G(r, q)$, $(r, q) \in D$, a equação de uma superfície S em coordenadas cilíndricas. Mostre que a área de S é dada por

$$A(S) = \iint \sqrt{1 + G_r^2 + \frac{1}{r^2} G_q^2} r dr dq .$$

6.54. Mostre que, em coordenadas cilíndricas, a equação $z = G(r)$, $a \leq r \leq b$, $0 \leq q \leq 2\pi$, representa uma superfície de revolução cuja área é dada por

$$A(S) = 2\pi \int_a^b \sqrt{1 + G_r^2} r dr .$$

6.2 INTEGRAL TRIPLA

O cálculo de integrais triplas se reduz ao cálculo de uma integral dupla seguida de uma integral simples e, dependendo da região de integração, a integral pode ser calculada de forma iterada como três integrais simples. Veja as seguintes situações, quando se deseja calcular $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV$:

$$(a) \Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (x, y) \in D \text{ e } j(x, y) \leq z \leq y(x, y)\} .$$

Neste caso D é a projeção no plano xy da região de integração Ω e

$$\left| \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV = \iint_D \left[\int_{j(x, y)}^{y(x, y)} f(x, y, z) dz \right] dA \right|$$

$$(b) \Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; a \leq x \leq b, j(x) \leq y \leq y(x) \text{ e } a(x, y) \leq z \leq b(x, y)\} .$$

Neste caso a integral tripla é calculada como uma integral iterada

$$\left| \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV = \int_a^b \left\{ \int_{j(x)}^{y(x)} \left[\int_{a(x, y)}^{b(x, y)} f(x, y, z) dz \right] dy \right\} dx \right|$$

Naturalmente, uma mudança na descrição da região Ω acarreta inversões na ordem de integração.

6.55. Expresse a integral $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV$ como uma integral iterada e em seguida calcule o seu valor para $f = xyz$ e Ω dado por:

- (a) $\Omega: -1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1, 1 \leq z \leq 2$ (b) $\Omega: -\sqrt{y} \leq x \leq \sqrt{y}, 0 \leq y \leq 4, 0 \leq z \leq 4 - y$.
 (c) $\Omega: x + z \leq y \leq x - z, 0 \leq x \leq z^2, 1 \leq z \leq 2$ (d) $\Omega: 0 \leq z \leq x + y, 1 \leq y \leq x^2, -1 \leq x \leq 2$

6.56. Escreva cada uma das integrais abaixo na ordem $dzdydx$:

$$(a) \int_0^1 \int_2^3 \int_4^5 e^{xyz} dx dy dz \quad (b) \int_0^1 \int_0^y \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 \sin(xy) dz dx dy \quad (c) \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{\sqrt{(z-1)^2-x^2}} x(y+z) dy dz dx$$

6.57. Em cada caso a integral iterada representa o volume de uma região S . Descreva S :

$$(a) \int_0^1 \int_{\sqrt{1-z}}^{\sqrt{4-z}} \int_2^3 dx dy dz \quad (b) \int_0^1 \int_{z^3}^{\sqrt{z}} \int_0^{4-x} dy dx dz \quad (c) \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} \int_0^{x+y} dz dy dx$$

$$(d) \int_0^1 \int_x^{3x} \int_0^{xy} dz dy dx \quad (e) \int_1^2 \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} \int_{-\sqrt{z-x^2}}^{\sqrt{z-x^2}} dy dx dz \quad (f) \int_1^4 \int_{-z}^z \int_{-\sqrt{z^2-y^2}}^{\sqrt{z^2-y^2}} dx dy dz$$

A. VOLUMES

Nos exercícios (6.57) a (6.64), esboce graficamente o sólido indicado e calcule seu volume por integração tripla:

6.58. Sólido delimitado pelo cilindro $y = x^2$ e pelos planos $y + z = 4$ e $z = 0$.

6.59. Sólido delimitado pelos planos $x = 0$, $y = 0$, $x = z$ e pelo cilindro $z = 1 - y^2$.

6.60. Sólido delimitado pelos cilindros $z = 3x^2$, $z = 4 - x^2$ e pelos planos $y = 0$, $y + z = 6$.

6.61. Sólido interseção dos parabolóides $z \leq 1 - x^2 - y^2$ e $z \geq x^2 + y^2 - 1$.

6.62. Sólido delimitado pelos planos $z = 0$, $z = 5 + x + y$ e pelos cilindros $y^2 = x$ e $y^2 = 1 - x$.

6.63. Sólido interseção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 \leq 6$ com o parabolóide $z \geq x^2 + y^2$.

6.64. Sólido delimitado pelo plano xy e pelas superfícies $x^2 + y^2 = 2x$ e $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

6.65. Em cada caso abaixo calcule o volume do sólido descrito pelas desigualdades:

$$(a) 0 \leq x \leq z \leq 1 - y^2 \quad (b) x^2 + y^2 \leq z \leq 2x$$

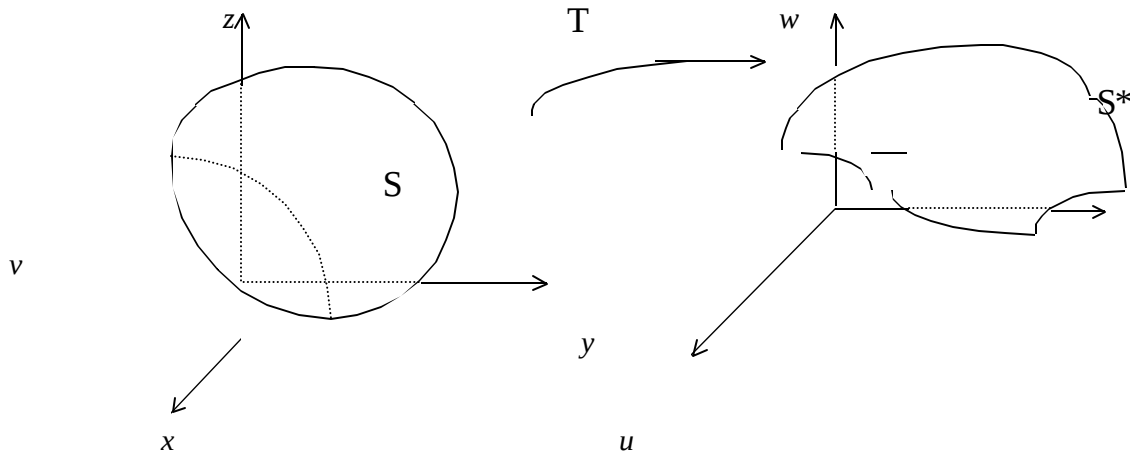
$$(c) x^2 + y^2 \leq z \leq 1 - x^2 \quad (d) x^2 + 4y^2 \leq 4 \text{ e } x + y \leq z \leq x + y + 1$$

B. MUDANÇA DE COORDENADAS

Consideremos uma transformação $T: \mathfrak{R}^3 \rightarrow \mathfrak{R}^3$ com Jacobiano diferente de zero, isto é,

$$T: \begin{cases} x = x(u, v, w) \\ y = y(u, v, w) \\ z = z(u, v, w) \end{cases} \quad \text{com} \quad J(T) = \frac{\mathfrak{J}(x, y, z)}{\mathfrak{J}(u, v, w)} \neq 0.$$

Seja S^* a imagem da região S pela transformação T , como sugere a figura abaixo.



Temos a seguinte “fórmula de mudança de variáveis” em integrais triplas:

$$\iiint_S f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{S^*} f[x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)] \left| \frac{\mathfrak{J}(x, y, z)}{\mathfrak{J}(u, v, w)} \right| du dv dw$$

6.66. Escreva as fórmulas de mudança de variáveis no caso das coordenadas cilíndricas e coordenadas esféricas.

6.67. Calcule o volume de uma esfera de raio R , usando no cálculo da integral tripla coordenadas cilíndricas e depois coordenadas esféricas.

6.68. Calcule o volume do elipsóide de equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

6.69. Usando coordenadas cilíndricas, calcule as seguintes integrais:

$$(a) \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z \, dV \quad (b) \int_0^2 \int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} \int_0^{x^2+y^2} \sqrt{x^2+y^2} \, dV \quad (c) \iiint_{\Omega} xy \, dV; \Omega: x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1$$

6.70. Usando coordenadas esféricas, calcule as seguintes integrais:

$$(a) \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{8-x^2-y^2}} (x^2 + y^2 + z^2) \, dz dy dx \quad (b) \int_0^{\sqrt{2}} \int_y^{\sqrt{4-y^2}} \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, dz dx dy$$

6.71. Usando uma mudança de coordenadas adequada, calcule o volume dos seguintes sólidos:

- (a) sólido delimitado pelo parabolóide $x^2 + y^2 = az$, pelo plano $z = 0$ e pelo cilindro $x^2 + y^2 = 2ax$, $a > 0$.
- (b) sólido delimitado pelas superfícies $z = x^2 + y^2$ e $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + 1)$.
- (c) sólido delimitado acima pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2a^2$ e abaixo pelo parabolóide $az = x^2 + y^2$, $a > 0$.
- (d) sólido interseção da bola $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 \leq 1$ com o cone $z^2 \geq x^2 + y^2$, $z \geq 0$.
- (e) sólido delimitado pelo parabolóide $z = -2(x^2 + y^2)$ e pelo plano $z = 4$.
- (f) sólido interior à esfera $4y = x^2 + y^2 + z^2$ e limitado acima pelo cone $y^2 = x^2 + z^2$.
- (g) sólido interior à esfera $z^2 + x^2 + y^2 = 1$ e exterior ao cone $z^2 = x^2 + y^2$.
- (h) calota interseção da bola $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ como semi-espaco $z \geq a$, $0 < a < R$.
- (i) sólido interseção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ com o cilindro $x^2 + y^2 \leq a^2$.

6.72. Faz-se um orifício circular em uma esfera, o eixo do orifício coincidindo com o eixo da esfera. O volume do sólido resultante é dado por

$$V = 2 \int_0^{2p} \int_0^{\sqrt{3}} \int_1^{\sqrt{4-z^2}} r dr dz dq$$

Por observação da integral determine o raio do orifício e o raio da esfera. Calcule V .

C. MASSA, CENTRO DE MASSA e MOMENTO DE INÉRCIA

Um sólido S é dito “não-homogêneo” quando sua densidade de massa não é constante. Por definição, densidade de massa é massa por unidade de volume. Denotando massa, volume e densidade de massa respectivamente por m , V e d temos que $d = \frac{m}{V}$. Na integral tripla $\iiint_S f(x, y, z) dV$ se o integrando é interpretado como densidade, a integral representará a massa do sólido S .

6.73. Calcule a massa contida numa esfera de raio R , cuja densidade de massa é proporcional à distância r ao centro da esfera. E se a densidade de massa fosse inversamente proporcional a r qual seria a massa da esfera?

6.74. Ache a massa do sólido delimitado pelo cone $z^2 = x^2 + y^2$, $0 \leq z \leq 4$, se a densidade no ponto P é proporcional à distância de P ao eixo-z.

6.75. Um sólido S é cortado da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ pelo cilindro $x^2 + y^2 = 2y$. A densidade no ponto P é proporcional à distância de P ao plano-xy. Calcule a massa de S.

6.76. Para uma altitude z de até dez mil metros, a densidade d (em kg / m^3) da atmosfera terrestre pode ser aproximada por $d = 1,2 - (1,05 \times 10^{-4})z + (2,6 \times 10^{-9})z^2$. Estime a massa de uma coluna de ar de 10 quilômetros de altura com base circular de 3 metros de raio.

Para um sólido S com densidade de massa $d(x, y, z)$ o “centro de massa” é o ponto $C(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, onde

$$\bar{x} = \frac{1}{m} \iiint_S x d(x, y, z) dV \quad \bar{y} = \frac{1}{m} \iiint_S y d(x, y, z) dV \quad \bar{z} = \frac{1}{m} \iiint_S z d(x, y, z) dV$$

e o “momento de inércia” com relação a um eixo L é dado por $I_L = \iiint_S d^2 dV$, onde $d(x, y, z)$ é a distância do ponto $P(x, y, z)$ do sólido S ao eixo L. Os momentos de inércia relativos eixos x , y e z serão denotados respectivamente por I_x , I_y e I_z .

6.77. Para um sólido S de densidade de massa $d(x, y, z)$, mostre que

$$(a) I_x = \iiint (y^2 + z^2) d dV \quad (b) I_y = \iiint (x^2 + z^2) d dV \quad (c) I_z = \iiint (x^2 + y^2) d dV$$

6.78. Determine o centro de massa de um hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$, $z \geq 0$, cuja densidade é proporcional à distância à base do hemisfério: $d = kz$.

6.79. Calcule o momento de inércia, em relação ao seu eixo, de um cilindro circular reto de raio R e altura H , com densidade $d(x, y, z) = k\sqrt{x^2 + y^2}$.

6.80. Mostre que o centróide do hemisfério $0 \leq z \leq \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ é o ponto $C(0, 0, 3R/8)$.

6.81. Um sólido tem a forma da região S interior ao cilindro $r = a$, interior à esfera $r^2 + z^2 = 4a^2$ e acima do plano-xy. A densidade em um ponto P é diretamente proporcional à distância de P ao plano-xy. Calcule a massa e o momento de inércia I_z do sólido.

6.82. Um sólido esférico tem raio a , e a densidade no ponto $P(x, y, z)$ é diretamente proporcional à distância de P a uma reta fixa l que passa pelo centro do sólido. Calcule sua massa.

6.83. Calcule o volume e o centróide da região S delimitada acima pela esfera $r = a$ e abaixo pelo cone $z = p$, $0 < a < p/2$.

6.84. Considere um sólido hemisférico de raio a , cuja densidade no ponto $P(x,y,z)$ é diretamente proporcional à distância de P ao centro da base. Calcule a massa, o centro de massa do sólido e o momento de inércia em relação ao eixo de simetria.