

UFPB - CCEN - DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
COORDENAÇÃO DO CURSO DE MESTRADO
1^A PROVA DE ANÁLISE REAL - PROF. Marivaldo

Prove ou dê um contra-exemplo:

(A) Se $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 4x^2 + y^2 > 4\}$, então $S \cap \partial S \neq \emptyset$.

(B) Num espaço vetorial normado E , toda bola aberta é um conjunto convexo.

(C) Todo subconjunto não-enumerável $S \subset \mathbb{R}^n$ possui ao menos um ponto de acumulação.

(D) Se $F \subset \mathbb{R}^n$ é um subconjunto fechado e $\{x_n\}$ é uma sequência em F convergindo para $x \in \mathbb{R}^n$, então $x \in F$.

(E) Se $x_n \rightarrow x$ em $\mathbb{R}^n$, segundo a norma do máximo, então $\langle x_n, y \rangle \rightarrow \langle x, y \rangle$, $\forall y \in \mathbb{R}^n$.

(F) Se $\langle x_n, y \rangle \rightarrow \langle x, y \rangle$, $\forall y \in \mathbb{R}^n$, então $x_n \rightarrow x$, segundo a norma euclideana.

(G) Dado um subconjunto $S \subset \mathbb{R}^n$, então toda sequência de Cauchy em S converge para um ponto de S .

(H) A função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} (xy, \frac{xy}{x^2 + y^2}), & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ (0, 0), & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

é contínua na origem.

(I) Se $K \subset \mathbb{R}^n$ é um subconjunto compacto e $f : K \rightarrow \mathbb{R}^m$ é contínua, então $G(f) = \{(x, f(x)); x \in K\}$ é um subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$.

(J) Se $S \subset \mathbb{R}^n$ é fechado e $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua, então existe $x_0 \in S$ tal que $f(x) \leq f(x_0)$, $\forall x \in S$.

(L) Se $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma sequência de funções contínuas convergindo uniformemente para uma função contínua $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b f(t) dt.$$

(M) Dada uma função contínua $f : (0, 1) \times (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^2$, o fecho do conjunto $S = \{(x, y); f(x, y) \neq (0, 0)\}$ em $(0, 1) \times (0, 1)$ é um subconjunto compacto de $(0, 1) \times (0, 1)$.

(N) A sequência em $\mathbb{R}^2$ de termo geral

$$X_n = \frac{1}{n} \left[\left(1, \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}, \frac{3}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n}, \frac{n}{n+1}\right) \right]$$

converge para o ponto $(0, 1)$.