

1ª PROVA DE ANÁLISE I

PER. 94.2 DATA: 26/11/94 PROF. MARCELO

ALUNO:

- 1) Seja $C \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo. Fixado $p \in \mathbb{R}^n$ seja $\varphi: C \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $\varphi(x) = |x - p| = \sqrt{\langle x - p, x - p \rangle}$. Existe no máximo um ponto $a \in C$ tal que $\varphi(a) = \inf \{\varphi(x); x \in C\}$.
- 2) Decida se os seguintes pares de conjuntos são ou não homeomorfos:
- a) elipse, círculo
 - b) S^2 , $\mathbb{R}^2$
 - c) 0 , 8
- Justifique!
- 3) Dados $X \subset \mathbb{R}^m$, $Y \subset \mathbb{R}^n$, uma aplicação $f: X \rightarrow Y$ diz-se aberta quando, para cada aberto $A \subset X$ em X , sua imagem $f(A)$ é um subconjunto aberto em Y . Prove que se X é compacto e conexo então toda aplicação contínua $f: X \rightarrow S^n$ é sobrejetiva.
- 4) Seja $\theta: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função-ângulo contínua para um caminho fechado e contínuo $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{0\}$. Prove que $n := \frac{\theta(b) - \theta(a)}{2\pi}$ é um número inteiro. Interprete n como o número de voltas "liquidas" que f dá em torno da origem.
- 5) Prove que um caminho $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ é Lipschitziano se e somente se f' é limitado em (a, b) .