

ALUNO:

Escolha 4 questões.

- 1) a) Sejam $V \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e $f: V \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Defina

$$\varphi: V \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \int_a^b f(x, t) dt.$$

Prove que φ é contínua.

- b) Dê um contra-exemplo para a) no caso de f não ser contínua.

- 2) Seja $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ p -vezes diferenciável em $a \in U$. Suponhamos que

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{|\alpha| \leq p} a_\alpha h^\alpha + r(h), \quad \forall a+h \in U,$$

onde $a_\alpha \in \mathbb{R}$ e $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{|h|^p} = 0$. Prove que $a_\alpha = \frac{1}{\alpha!} (\partial^\alpha f)(a)$.

- 3) Seja $f: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 tal que $f(0, 0) = 0$ e $f_t(0, 0) \neq 1$. Prove que a equação

$$f(x, t) - t = 0$$

define t implicitamente como função de x e vale a fórmula

$$\nabla_x t = \frac{1}{1 - f_t} \nabla_x f, \quad x \sim 0.$$

- 4) Determine os pontos de máximo, mínimo ou sela da função

$$f(x_1, \dots, x_n) = \lambda x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 + 2x_2 + \dots + 2x_n,$$

onde $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

- 5) Seja $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável. Se $df(a) \neq 0$, $a \in U$, e $\frac{\partial f}{\partial v}(a) = 0$, $v \in \mathbb{R}^n$, então v é perpendicular a $\nabla f(a)$.