

TOPOLOGIA GERAL - 1ª PROVA - 10/JULHO/2001

1) Justifique qual o motivo pelo qual cada uma das seguintes afirmações é FALSA:

- a) A função $f : (\mathbb{R}, \tau_1) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_2)$ definida por $f(x) = x^2$ e contínua para quaisquer topologias τ_1 e τ_2 de $\mathbb{R}$.
- b) Não existe uma topologia τ de $\mathbb{R}$ na qual o conjunto $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x < 2\}$ seja simultaneamente aberto e fechado.
- c) Quando uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para um limite a , então esse limite é único.
- d) O conjunto das faixas abertas horizontais ilimitadas

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a < y < b \text{ e } a, b \in \mathbb{R}\}$$

formam uma base para a topologia usual de $\mathbb{R}^2$.

e) Se $(X_\lambda)_{\lambda \in I}$ são fechados em um espaço topológico, então $\bigcup_{\lambda \in I} X_\lambda$ é fechado.

Resolva 4 das seguintes questões:

2) Sejam $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $\mathcal{A} = \{\{1\}, \{1, 2\}, \{2, 3, 4\}, \{4, 5, 6\}\}$. Calcule a topologia em X gerada por $\mathcal{A}$.

3) Sejam $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, τ a topologia cuja base é $\mathcal{B} = \{\{1\}, \{1, 2, 3\}, \{4, 5\}\}$ e $A = \{3, 4\}$. Determine em (X, τ) os seguintes conjuntos: A' , $\bar{A}$, $\text{int}(A)$ e a fronteira de A .

4) Seja $\tau = \{\emptyset, \mathbb{R}^2\} \cup \{G_k \mid k \in \mathbb{R}\}$, onde

$$G_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > x + k\}.$$

- a) Mostre que τ é uma topologia em $\mathbb{R}^2$.
- b) Mostre que τ **não** é uma topologia se trocarmos " $k \in \mathbb{R}$ " por " $k \in \mathbb{Q}$ ".

5) Seja $f : (X, \sigma) \longrightarrow (Y, \tau)$ contínua. Mostre que $f : X \longrightarrow f(X)$ também é contínua, onde em $f(X)$ é usada a topologia relativa $\tau_{f(X)}$.

6) Considere $\mathbb{R}$ com a topologia usual. Mostre que se toda função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua, então X é um espaço discreto.

Sugestão: Calcule $\chi_A^{-1}([\frac{1}{2}, \frac{3}{2}])$ onde $A = \{p\} \subset X$ e $\chi_A : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é definida por:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A \\ 0, & \text{se } x \notin A \end{cases}.$$