

UFPB - CCEN - DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
INTRODUÇÃO À GEOMETRIA DIFERENCIAL
3ª PROVA - 24/FEVEREIRO/2000

Resolva uma das questões 1A ou 1B e as questões 2, 3, 4

1A) Seja $\mathcal{X}(u, v)$ uma superfície regular e $N(u, v)$ o vetor normal unitário. Mostre que

$$N_u \times N_v = K(X_u \times X_v),$$

onde K é a função curvatura gaussiana de $\mathcal{X}$.

1B) Verifique que todos os pontos de uma superfície regular da forma

$$\mathcal{X}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, f(v)),$$

onde f é uma função diferenciável estritamente monótona, são hiperbólicos.

2) Considere

$$\mathcal{X}(u, v) = \left(u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + u^2v, u^2 - v^2\right),$$

conhecida como *superfície de Enneper* (fig. 1). Sabendo que os coeficientes das formas quadráticas de $\mathcal{X}$ são $E = G = (1 + u^2 + v^2)^2$, $F = 0$, $e = 2$, $f = 0$, $g = -2$, mostre que $\mathcal{X}$ é uma superfície mínima e calcule suas curvaturas principais.

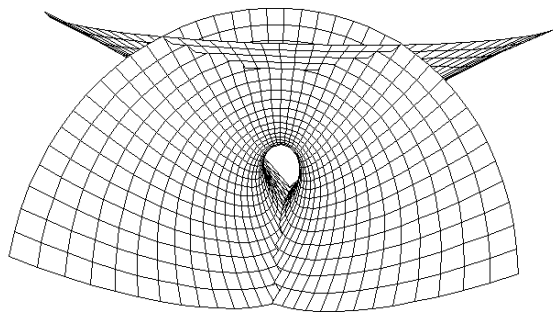


Figura 1: Superfície de Enneper

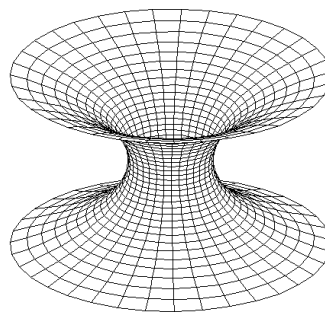


Figura 2: Catenóide

3) Determine as linhas de curvatura e as linhas assintóticas de uma *superfície de Enneper*.

4) Escreva as equações diferenciais envolvendo as funções u e v de modo que $\alpha(t) = \mathcal{X}(u(t), v(t))$ seja uma geodésica do *catenóide* (fig. 2) parametrizado por

$$\mathcal{X}(u, v) = (\cos u \cosh v, \sin u \cosh v, v).$$