

REPOSIÇÃO DA 2ª PROVA DE INTRODUÇÃO À ÁLGEBRA - OUTUBRO/98

Resolva 5 das seguintes questões:

1) Sejam H, N dois subgrupos normais em G . Mostre que se $N \leq H$, então $H/N \triangleleft G/N$.

- 2) Mostre que:
- a) $(\mathbb{Z}, +) \triangleleft (\mathbb{Q}, +)$;
 - b) Todo elemento de $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, +)$ tem ordem finita;
 - c) $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, +)$ não é isomorfo a $(\mathbb{Q}, +)$ e nem a $(\mathbb{Z}, +)$.

3) Seja G um grupo e $a \in G$. Mostre que $f : G \longrightarrow G$ definida por $f(x) = x^a = a^{-1}xa$ é um automorfismo de G .

4) Mostre que G é um grupo abeliano se e somente se $f : G \longrightarrow G$, $f(x) = x^{-1}$ é homomorfismo.

5) Mostre que f é um homomorfismo de grupos e calcule o núcleo de f :

- a) $f : \mathbb{Z}, + \longrightarrow \mathbb{Z}_7, +, \quad f(x) = \bar{x}$
- b) $f : \mathbb{C} - \{0\}, \cdot \longrightarrow \mathbb{C} - \{0\}, \cdot, \quad f(z) = z^4$
- c) $\mathcal{F} = \{h : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R} \mid h \text{ contínua} \}, \quad f : \mathcal{F}, + \longrightarrow \mathbb{R}, +, \quad f(g) = \int_{-1}^1 g(x)dx$

6) Se G é um grupo com subgrupos N e H tais que $N \triangleleft G$ e $N \leq H \triangleleft G$, então mostre que

$$\frac{G/N}{H/N} \simeq G/H$$