

EXERCÍCIOS DE *GEOMETRIA DIFERENCIAL* - OUTUBRO/99

1) Seja $\alpha(s)$ uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco. Então mostre que:

a) $\alpha'''(s) = -\kappa^2(s)t(s) + \kappa'(s)n(s) + \tau(s)\kappa(s)b(s)$

b) $[\alpha'(s), \alpha''(s), \alpha'''(s)] = \kappa(s)^2\tau(s)$

c) $[\alpha''(s), \alpha'''(s), \alpha^{(4)}(s)] = \kappa^5(s) \frac{d}{ds} \left(\frac{\tau(s)}{\kappa(s)} \right)$

d) Se $\kappa(s) \neq 0, \forall s$, então

$$\alpha(s) \text{ é uma hélice se, e somente se, } [\alpha''(s), \alpha'''(s), \alpha^{(4)}(s)] = 0.$$

2) Determine a forma geral da função $f(t)$ de modo que a curva

$$\alpha(t) = (a \cos t, b \cos t, f(t))$$

seja plana.

3) Dados dois círculos de raios r e R , com $r < R$, escolha um ponto P no círculo menor a uma distância d do seu centro. Ao deslocar sem deslizar o círculo de raio r por dentro (por fora) do círculo de raio R o ponto P descreve uma *hipociclóide* (*epiciclóide*, respectivamente). Veja por exemplo as figuras 2 e 1. Obtenha as parametrizações dessas curvas.

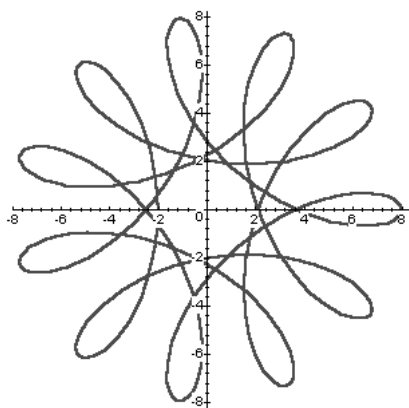


Figura 1: Hipoclóide

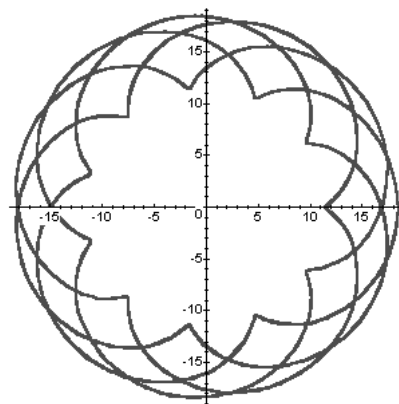


Figura 2: Epiciclóide

4) Seja $\alpha(t) = a \int g(t) \times g'(t) dt$ onde a é uma constante $\neq 0$ e $g(t) = (g_1(t), g_2(t), g_3(t))$ é tal que $|g(t)| = 1$ e $[g(t), g'(t), g''(t)] \neq 0$. Mostre que $\kappa(t) \neq 0$ e que $\tau(t) = 1/a$.

5) Seja $\alpha(s)$ uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco. Mostre que $\alpha'(s) \cdot \alpha''(s) = 0$, $\alpha'(s) \cdot \alpha'''(s) = -\kappa^2(s)$, $\alpha''(s) \cdot \alpha'''(s) = \kappa(s)\kappa'(s)$ e que $|\alpha'''(s)|^2 = \kappa^4(s) + \kappa^2(s)\tau^2(s) + \kappa'(s)^2$.

6) Determine um vetor $\omega(s)$ tal que

$$\begin{cases} t'(s) &= \omega(s) \times t(s) \\ n'(s) &= \omega(s) \times n(s) \\ b'(s) &= \omega(s) \times b(s) \end{cases}$$

(OBS.: Neste caso, $\omega(s)$ chama-se *vetor de Darboux* e é interpretado fisicamente como a velocidade angular instantânea)

7) Seja $\alpha(s)$ uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco. Mostre que:

a) $[t(s), b(s), b'(s)] = \tau(s)$

b) $[b'(s), b''(s), b'''(s)] = \tau^5(s) \left(\frac{\kappa(s)}{\tau(s)} \right)'$

c) $[t'(s), t''(s), t'''(s)] = \kappa^5(s) \left(\frac{\tau(s)}{\kappa(s)} \right)'$

8) Determine os valores de a e b para os quais na curva $\alpha(t) = (a \cosh t, a \sinh t, bt)$ tem-se $\kappa(t) = \tau(t)$, $\forall t$.

9) Mostre que o raio de curvatura de uma *espiral cônica*

$$\alpha(t) = (a \cos t \cdot e^{kt}, a \sin t \cdot e^{kt}, b \cdot e^{kt})$$

é proporcional à distância entre um ponto da espiral ao eixo do cone.

10) Mostre que as seguintes curvas são planas e determine as equações dos planos que contêm seus traços:

a) $\alpha(t) = (a_1 t^2 + b_1 t + c_1, a_2 t^2 + b_2 t + c_2, a_3 t^2 + b_3 t + c_3)$

b) $\alpha(t) = \left(\frac{1+t}{1-t}, \frac{1}{1-t^2}, \frac{1}{1+t} \right)$

11) Mostre que a curva-interseção das superfícies definidas implicitamente por $x^2 = 3y$ e $2xy = 9z$ é uma hélice.

12) Mostre que $\alpha(t) = (2t, \ln t, t^2)$ é uma hélice.

13) Seja $\beta(s)$ uma reta que faz contato de ordem ≥ 1 com uma curva $\alpha(s)$. Mostre que $\beta(s)$ é a reta tangente a $\alpha(s)$ no ponto de contato.

14) Seja $\beta(s)$ uma circunferência que faz contato de ordem ≥ 2 com uma curva $\alpha(s)$. Mostre que $\beta(s)$ é o círculo osculador a $\alpha(s)$ no ponto de contato.

15) Determine os pontos sobre a curva $\alpha(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t, \cos 2t)$ para os quais a curvatura assume um valor mínimo local.

16) A *esfera osculatriz* a uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco $\alpha(s)$ no ponto s_0 é definida como sendo a esfera de centro no ponto

$$\alpha(s_0) + \frac{1}{\kappa(s_0)} n(s_0) - \frac{\kappa'(s_0)}{\kappa^2(s_0) \tau(s_0)} b(s_0)$$

e tangente a $\alpha(s)$ em s_0 .

a) Calcule o raio da esfera osculatriz em s_0

b) O *raio de torção* é definido como sendo $\sigma(s_0) = 1/\tau(s_0)$. Mostre que o centro da esfera osculatriz pode ser escrito na forma $\alpha(s_0) + \rho(s_0) + \rho'(s_0)\sigma(s_0)b(s_0)$.

c) Determine a esfera osculatriz em um ponto qualquer da curva

$$\alpha(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, e^t).$$