

UFPB - CCEN - DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
PROVA FINAL DE "FUNDAMENTOS DA MATEMATICA" - PERIODO 901

1) Enuncie: a) o Teorema de Cantor

b) o Teorema de Schöeder-Bernstein

c) o Axioma da Escolha

d) o Lema de Zorn

e) o Teorema de Zermelo

Defina e dê um exemplo:

f) conjunto bem ordenado

g) conjuntos semelhantes

h) ínfimo de um subconjunto ordenado

2) Seja $\mathcal{E}$ uma coleção de pontos e definamos em $\mathcal{E}$ uma relação R . R chama-se uma *relação de ordem parcial* em $\mathcal{E}$ se os seguintes axiomas são satisfeitos:

A1) para todo $x \in \mathcal{E}$, temos $x R x$.

A2) se $x, y \in \mathcal{E}$ são tais que $x R y$ e $y R x$, então $x = y$.

A3) se $x, y, z \in \mathcal{E}$ são tais que $x R y$ e $y R z$, então $x R z$.

a) Mostre que este sistema de axiomas é satisfatório e consistente.

b) Mostre a independência dos axiomas do sistema.

c) O sistema é categórico? é completo?

3) Seja $\mathcal{W} = \{ 2, 3, 5, 6, 15, 60 \}$ ordenado por divisibilidade.

Verifique se $\mathcal{W}$ é totalmente ordenado ou bem ordenado. Calcule os elementos maximais, minimais, primeiro e último elementos de $\mathcal{W}$.

4) Calcule o número cardinal de cada A_i :

a) $A_1 = [0, 3] \times]-\infty, 4[$

b) $A_2 = \mathcal{P}(\mathbb{Z})$

c) $A_3 = \mathbb{Q} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$

d) $A_4 = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$

e) $A_5 = \mathbb{Q}^- \cup [2, \infty[$

f) $A_6 = \mathcal{P}([1, 2] \cup [3, 7])$

5) Seja $\varphi : \mathbb{Z} \times [0, 1[\longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\varphi(x, y) = x + y$. Mostre que φ é uma bijeção. Que relação entre $\aleph_0$, c e c você pode deduzir a partir de φ ?