

2ª PROVA DE ESTRUTURAS ALGÉBRICAS - AGOSTO/1999

- 1) a) Seja $G = \langle x \rangle$ um grupo cíclico de ordem 12. Determine duas séries de composição

$$G = G_0 \triangleright G_1 \triangleright \cdots \triangleright G_{r-1} \triangleright G_r = \{e\}$$

e

$$G = H_0 \triangleright H_1 \triangleright \cdots \triangleright H_{r-1} \triangleright H_r = \{e\}$$

tais que $G_i \neq H_i$, $1 \leq i \leq r-1$.

- b) Enuncie o *Teorema de Jordan-Hölder* e exemplifique sua aplicação às séries obtidas no item anterior.

- 2) a) Dê exemplo de três grupos não solúveis não isomorfos de ordem 360.

- b) Escreva uma série de composição para cada um desses grupos.

- 3) Dê as decomposições primária e de torção de todos os grupos abelianos G (não isomorfos) de ordem $|G| = p^5 \cdot q^4$, onde p e q são primos distintos.

Resolva uma das questões 4 ou 4' e uma entre 5 e 5'.

- 4) a) Dê exemplo de dois 3-subgrupos de Sylow H_1 e H_2 distintos de $G = S_4$ e encontre $g \in G$ tal que $gH_1g^{-1} = H_2$.

- b) Calcule a quantidade total de 3-subgrupos de Sylow de S_4 .

- 4') Seja $G = (\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z} \times 2\mathbb{Z} \times 3\mathbb{Z}, +)$.

- a) Calcule o subgrupo de torção $T(G)$ e um subgrupo K abeliano livre finitamente gerado tais que $G = T(G) \oplus K$.

- b) Calcule uma base para K e o posto de G .

- c) Calcule os coeficientes de torção de G . (*Lembre-se de fatorar 4, 6 e 12 !*)

- 5) Mostre que um grupo de ordem 96 não pode ser simples.

- 5') Mostre que um grupo de ordem 30 não pode ser simples.