

1ª PROVA DE ESTRUTURAS ALGÉBRICAS - JUNHO/1999

1) Seja $\sigma \in S_{13}$ a permutação

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ 11 & 3 & 12 & 10 & 13 & 1 & 9 & 2 & 6 & 4 & 7 & 8 & 5 \end{pmatrix}.$$

- a) Mostre que $\sigma^{1999} = \sigma^{-1}$
- b) Escreva σ como produto de transposições
- c) No desenvolvimento do determinante de uma matriz $(a_{ij})_{13 \times 13}$ com que sinal aparece o termo $a_{111}a_{23}a_{312}a_{410}a_{513}a_{61}a_{79}a_{82}a_{96}a_{104}a_{117}a_{128}a_{135}$?

2) Seja p um primo e G um grupo de ordem p^3 .

- a) Se H_1 e H_2 são dois subgrupos de G tais que $H_1 \neq H_2$ e $|H_1| = |H_2| = p$, então calcule $H_1 \cap H_2$.
- b) Mostre que existe no máximo $p^2 + p + 1$ subgrupos de ordem p em G .
- c) Dê exemplo de um primo p e um grupo de ordem p^3 que contenha exatamente $p^2 + p + 1$ subgrupos de ordem p .

3) Sejam G_1, G_2 grupos e sejam H_1, H_2 subgrupos normais de G_1, G_2 , respectivamente. Mostre que $H_1 \times H_2$ é um subgrupo normal de $G_1 \times G_2$ e que

$$\frac{G_1 \times G_2}{H_1 \times H_2} \simeq \frac{G_1}{H_1} \times \frac{G_2}{H_2}$$

Sugestão: considere $\varphi : G_1 \times G_2 \longrightarrow \frac{G_1}{H_1} \times \frac{G_2}{H_2}$, definida por $\varphi(g_1, g_2) = (g_1H_1, g_2H_2)$.

4) a) Seja $G = GL(2, \mathbb{R})$ e $a, b \in G$ dados por $a = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ e $b = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Mostre que $o(a) = 4$, $o(b) = 3$ e que ab não tem ordem finita.

b) Existe grupo abeliano G com dois elementos a e b tais que $o(a) = 4$, $o(b) = 3$ e $o(ab)$ não sendo finita?

5) Seja G um grupo e $a, b \in G - \{e\}$ tais que $a^5 = e$ e $aba^{-1} = b^2$. Mostre que a ordem de b é 31.