

ESTRUTURAS ALGÉBRICAS – EXERCÍCIOS – julho/99

1) Seja p/q uma raiz de $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ onde $p, q, a_0, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ e $\text{mdc}(p, q) = 1$. Mostre que: a) $p|a_0$ e $q|a_n$;

b) $(p - mq)|f(m)$, $\forall m \in \mathbb{Z}$. Em particular, $(p - q)|f(1)$ e $(p + q)|f(-1)$. *Sugestão: existem inteiros α_i tais que $f(x) = \alpha_n(x - m)^n + \cdots + \alpha_1(x - m) + \alpha_0$; calcule $f(p/q)$ e $f(m)$.*

2) Verifique se a equação $17x^{100} - x^{50} + 6x^3 - 81 = 0$ possui raiz racional.

3) Se a e b são inteiros ímpares, mostre que a equação $x^n + ax + b = 0$ não possui raiz racional, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

4) Mostre que $\sqrt[3]{2 + \frac{10}{9}\sqrt{3}} + \sqrt[3]{2 - \frac{10}{9}\sqrt{3}}$ é um número inteiro.

5) a) Sejam $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ e $y = x + d$. Determine d (em função de a, b, c) de modo que $p(y)$ tenha coeficiente de y^2 igual a 0.

b) Determine m, n (em função de A e B) de modo que $x = \sqrt[3]{m + \sqrt{n}} + \sqrt[3]{m - \sqrt{n}}$ seja uma raiz da equação $x^3 + Ax + B = 0$ (ou seja, obtenha uma fórmula de resolução para este tipo de equação).

c) Pelo item (a), toda equação da forma $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ pode ser reduzida a uma equação da forma $y^3 + Ay + B = 0$. Use isto para resolver a equação $x^3 - x^2 + 2x + 3 = 0$.

6) a) Mostre que $4 \cos 40^\circ$ é uma raiz irracional da equação $x^3 - 12x + 8 = 0$.

b) Mostre que $\cos 1^\circ$ é um número irracional. *Sugestão: use o item (a) e o fato de que $\cos(40x)$ pode ser escrito como uma soma de potências de $\cos x$ com coeficientes inteiros.*

7) Mostre que $x^{3m} + x^{3n+1} + x^{3p+2}$ é divisível por $x^2 + x + 1$, para quaisquer inteiros positivos m, n, p . *Sugestão: mostre inicialmente que $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0 \Rightarrow \alpha^3 = 1$.*

8) Seja r uma raiz qualquer do polinômio de grau n $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{C}[x]$. Mostre que $|r| \leq 1 + \frac{M}{|a_n|}$, onde $M = \max\{|a_0|, |a_1|, \dots, |a_{n-1}|\}$. (Por exemplo, todo polinômio cujos coeficientes complexos têm módulos iguais a 1 tem todas as raízes com módulos ≤ 2 , não importando qual seja o grau). *Sugestão: $|r| > 1 + M/|a_n| \Rightarrow |f(r)| = |a_n r^n (1 + \frac{a_{n-1}}{a_n r} + \cdots + \frac{a_0}{a_n r^n})| \geq |a_n| |r|^n (1 - \frac{M}{|a_n|} (\frac{1}{|r|} + \cdots + \frac{1}{|r|^n})) > 0$.*

9) a) Calcule $d(x) = \text{mdc}(2x^2 + x + 1, x^3 - 2)$ e determine polinômios $p(x)$ e $q(x)$ em $\mathbb{Z}[x]$ tais que

$$p(x)(2x^2 + x + 1) + q(x)(x^3 - 2) = d(x).$$

b) Usando (a), *racionalize* o denominador de $\frac{1}{1 + \sqrt[3]{2} + 2\sqrt[3]{4}}$.

10) a) Calcule $d(x) = \text{mdc}(x^3 + x + 1, x - 1)$ e determine polinômios $p(x)$ e $q(x)$ em $\mathbb{Z}[x]$ tais que

$$p(x)(x^3 + x + 1) + q(x)(x - 1) = d(x).$$

b) Seja α uma raiz real da equação $x^3 + x + 1 = 0$. Mostre que α é irracional e, usando (a), *racionalize* o denominador da expressão $\frac{\alpha}{\alpha - 1}$.

11) Mostre que os seguintes polinômios são redutíveis em $\mathbb{Z}[x]$:

a) $p_1(x) = x^8 + 2x^5 + x^2 - 9$

b) $p_2(x) = x^4 + 4$

c) $p_3(x) = x^4 + x^2 + 1$

d) $p_4(x) = x^5 + x + 1$ - *Sugestão: some e subtraia os termos x^4, x^3 e x^2 .*

12) Seja $\mathbb{K}$ um corpo finito. Mostre que toda função $f: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ é polinomial. *Sugestão: use polinômios de Lagrange (livro texto pág. 47).*

13) Sejam $a_1, a_2, \dots, a_n$ números inteiros dois a dois distintos.

a) Sejam $f(x)$, $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ polinômios não constantes em $\mathbb{Z}[x]$ tais que $f(x) = \varphi(x)\psi(x)$ e $f(a_i) = -1$ para todo $i = 1, \dots, n$. Mostre que $\varphi(x) = -\psi(x)$, $\forall x \in \mathbb{Z}$.

b) Mostre que o polinômio $f(x) = (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n) - 1$ é irreduzível em $\mathbb{Z}[x]$.

14) O polinômio $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{C}[x]$ possui raízes não nulas $x_1, \dots, x_n$. Determine quais são as raízes dos seguintes polinômios:

a) $g(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} \cdots + a_{n-1} x + a_n$

b) $h(x) = a_n x^n - a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} - \cdots + (-1)^n a_0$

c) $j(x) = a_n x^n + a_{n-1} b x^{n-1} + a_{n-2} b^2 x^{n-2} \cdots + a_1 b^{n-1} x + a_0 b^n$ onde $b \in \mathbb{C}$.

15) Determine todos os possíveis homomorfismos de anéis $f : (A, +, \cdot) \longrightarrow (B, +, \cdot)$ em cada caso abaixo:

a) $A = \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{Z}_{17}$

b) $A = \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{Z}_6$

c) $A = \mathbb{Q}$, $B = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

d) $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{Z}$

16) Mostre em cada caso abaixo que $(A, +, \cdot)$ e $(B, +, \cdot)$ não são anéis isomorfos. Existe $f : A \longrightarrow B$ homomorfismo?

a) $A = \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$, $B = \mathbb{Q}[\sqrt{5}]$

b) $A = 2\mathbb{Z}$, $B = 3\mathbb{Z}$

c) $A = \mathbb{Q}$, $B = \mathbb{R}$

d) $A = \mathbb{Q}[\sqrt{3}]$, $B = \mathbb{Q}$

17) Dê exemplo de um anel A e um subanel $B \subset A$ tais que:

a) $\exists 1_A$, $\exists 1_B$, mas $1_A \neq 1_B$

b) $\exists 1_A$, mas $\nexists 1_B$

18) Mostre que

a) $f : (\mathbb{R}, +, \cdot) \longrightarrow (\mathbb{R}, +, \cdot)$, $f(x) = x - 1$ não é um isomorfismo de anéis;

b) $f : (\mathbb{R}, +, \cdot) \longrightarrow (\mathbb{R}, \oplus, \odot)$, $f(x) = x - 1$ é um isomorfismo de anéis, onde $a \oplus b = a + b + 1$ e $a \odot b = a + b + ab$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$.

19) Seja $\mathcal{F} = \{f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ é contínua}\}$. Mostre que:

a) $I = \{f \in \mathcal{F} \mid f(1/2) = 0\}$ é um ideal maximal de $\mathcal{F}$;

b) $F : \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{R}$, $F(f) = f(1/2)$ é um homomorfismo de anéis;

c) Calcule o núcleo e a imagem de F ;

d) $\mathcal{F}/I$ é um corpo. Identifique esse corpo.

20) Sabendo que o anel dos quatérnios

$$\mathbb{H} = \{a + bi + cj + dk \mid i^2 = j^2 = k^2 = -1, ij = k = -ji, jk = i = -kj, ki = j = -ik, a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$$

é isomorfo ao anel das matrizes

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{bmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\},$$

(soma e produto usuais) calcule o inverso multiplicativo de um quatérnio não nulo $a + bi + cj + dk$ através do cálculo da inversa de uma matriz de M . *Sugestão: o cálculo da inversa de uma matriz do tipo mencionado acima pode ser facilmente feito se for efetuado o produto da matriz pela sua transposta.*

EXERCÍCIOS DO LIVRO-TEXTO: Pág 23 $\rightarrow$ 1 e 3 ;

Pág. 58 – 63 $\rightarrow$ 3, 4, 6, 8, 9, 10, 11, 14, 15, 16, 17, 18, 20, 21, 23 (itens 1 e 2), 24, 25, 26.