

1) Quais dos números abaixo são construtíveis?

$$a = \sqrt[11]{3}, \quad b = \frac{\sqrt[4]{1+\sqrt{2}}}{\sqrt[8]{7}}, \quad c = \pi\sqrt{2},$$

$$d = \cos \frac{2\pi}{17}, \quad f = \sin \frac{2\pi}{19}, \quad g = \cos 1^\circ$$

2) Sabendo que $\cos 18^\circ = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$ (*), mostre que:

a) $(\cos 18^\circ, \sin 18^\circ)$ é construtível

b) um icosaédono regular (20 lados) é construtível

c) $\cos 72^\circ$ é construtível

d) um pentágono regular (5 lados) é construtível

3) a) Mostre que $p(x) = x^3 + x^2 - 2x - 1$ é irredutível sobre $\mathbb{Q}$.

b) Sabendo que $2\cos \frac{2\pi}{7}$ é raiz de $p(x)$ (**), mostre que o ponto $(\cos \frac{2\pi}{7}, \sin \frac{2\pi}{7})$ não é construtível

c) Mostre que o heptágono regular (7 lados) não é construtível

d) $\cos \frac{\pi}{7}$ e $\tan \frac{\pi}{7}$ são construtíveis?

(*) Faça $x = 18^\circ$ em $\cos 5x = 16\cos^5 x - 20\cos^3 x + 5\cos x$

(**) Use que $\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ ($i^2 = -1$), $e^{2\pi i} = 1$,

$$\text{e que } \sum_{n=-3}^3 x^n = \frac{x^{-3}(x^7-1)}{x-1}.$$