

# INTRODUÇÃO À ANÁLISE

1. Seja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

Mostre que  $f'(0) = 0$ , o mesmo ocorrendo com  $f''(0)$ , com  $f'''(0)$  e assim por diante

2. Seja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  derivável

a) Se  $f$  é par, mostre que sua derivada é ímpar

b) Se  $f(tx) = tf(x)$  para quaisquer  $t, x \in \mathbb{R}$

Mostre que existe um  $c \in \mathbb{R}$ ;  $f(x) = cx \quad \forall x \in \mathbb{R}$

3. Seja  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

Mostre que  $f$  é integrável

4. Sejam  $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$  duas funções limitadas definidas em um intervalo fechado. Mostre que

$$\sup(f+g) \leq \sup f + \sup g$$

Dê exemplo onde vale somente " $<$ "

5. Se  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  satisfaz  $|f(y) - f(x)| \leq c|y - x|^{\alpha}$  com  $\alpha > 1$ ,  $c \in \mathbb{R}$ , e  $x, y \in I$ , arbitrários, prove que  $f$  é constante

6. Seja  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrável com  $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b]$ . Se  $f$  é contínua no ponto  $c \in [a, b]$  e  $f(c) > 0$ , mostre que  $\int_a^b f(x) dx > 0$ .