

UFPB- DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA.

DISCIPLINA:

FUNDAMENTOS DA MATEMÁTICA

ELEMENTAR

AXIOMA DA ESCOLHA

LEMA DE ZORN

TEOREMA DA BOA ORDEM

PROF. JONAS DE MIRANDA GOMES.

1- FAMÍLIAS DE CONJUNTOS

Se a cada elemento α de algum conjunto $A \neq \emptyset$ corresponde um conjunto A_α , então a coleção de conjuntos $\{A_\alpha; \alpha \in A\}$ é chamada uma família de conjuntos, e A é chamado conjunto de "índices". Não é necessário que conjuntos com índices distintos sejam diferentes. Vamos agora estender as noções de união e interseção para famílias de conjuntos.

DEFINIÇÃO 1: Seja I um conjunto dado, e $\{A_\alpha; \alpha \in A\}$ uma família de subconjuntos de I . então:

$$\bigcup_{\alpha} A_\alpha = \{x \in I; \exists \alpha \in A \text{ e } x \in A_\alpha\}$$

$$\bigcap_{\alpha} A_\alpha = \{x \in I; \forall \alpha \in A, x \in A_\alpha\}$$

Ex 1.º seja $A_k = \{n \in \mathbb{Z}; n \geq k\}$ $k=1, 2, 3, \dots$. Observe que $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots$ e temos que $\bigcap_n A_n = \emptyset$

2.º Para cada n inteiro e positivo, sejam $A_n = [0, 1-2^{-n}]$ e $B_n = [0, 1-3^{-n}]$. Observe que cada A_n é um subconjunto próprio de B_n e que nenhum A_n é igual a algum B_k . Entretanto $\bigcup_n A_n = \bigcup_n B_n = [0, 1)$.

No que foi dito acima, $A \neq \emptyset$. Existe porém interesse teórico em considerarmos o caso em que o conjunto de índices é vazio. Neste caso é fácil você verificar que de acordo com a def. 1, temos:

$$\bigcup_{\alpha} \{A_{\alpha}; \alpha \in A\} = \emptyset \text{ e } \bigcap_{\alpha} \{A_{\alpha}; \alpha \in A\} = \Gamma$$

onde Γ é o universo especificado. Dizemos que uma família $\{A_{\alpha}; \alpha \in A\}$ é não vazia, se o conjunto de índices $A \neq \emptyset$; claro que isto não exclui a possibilidade de que $A_{\alpha} = \emptyset$ para algum $\alpha \in A$.

Representaremos por $P(A)$ o conjunto das partes de um conjunto A ; isto é o conjunto cujos elementos são os subconjuntos de A .

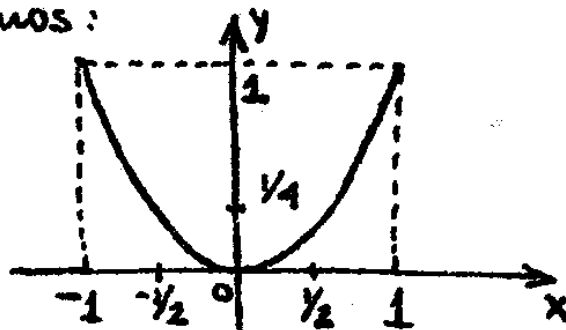
Dada uma função $f: X \rightarrow Y$, para cada $A \subset X$, o conjunto $f(A) = \{f(x); x \in A\} \subset Y$ é chamada imagem de A em Y pela função f .

Ex 3. sejam $X = [-1, 1]$, $Y = [0, 2]$ e $f: X \rightarrow Y$ definida por $y = x^2$. então temos:

$$f\left(\left[0, \frac{1}{2}\right]\right) = \left[0, \frac{1}{4}\right]$$

$$f\left(\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]\right) = \left[0, \frac{1}{4}\right]$$

$$f(X) = [0, 1]$$



2- PRODUTOS CARTESIANOS GERAIS

Vocês já sabem que se A e B são dois conjuntos, seu produto cartesiano $A \times B$ é:

$A \times B = \{(a, b); a \in A \text{ e } b \in B\}$. Estenderemos aqui este conceito para qualquer família de conjuntos. Esta extensão será motivada pela observação de que os elementos de $A \times B$ podem ser considerados como funções do conjunto de índices $\{a, b\}$ da família $\{A, B\}$, em $A \cup B$ tais que $f(a) \in A$ e $f(b) \in B$.

Definição 2: SEJA $\{A_\alpha; \alpha \in A\}$ uma família de conjuntos. O produto cartesiano $\prod_\alpha A_\alpha$, é o conjunto de todas as funções $c: A \rightarrow \bigcup_\alpha A_\alpha$, tais que $\forall \alpha \in A$ tem-se $c(\alpha) \in A_\alpha$.

Um elemento $c \in \prod_\alpha A_\alpha$ é geralmente representado por $\{a_\alpha\}$ indicando que $c(\alpha) = a_\alpha$ para cada α . Com esta notação, $a_\alpha \in A_\alpha$ é chamado α -ésima coordenada de $\{a_\alpha\}$. O conjunto A_α é chamado o α -ésimo fator de $\prod_\alpha A_\alpha$. Vejamos alguns exemplos:

Ex 4. Se cada A_α tem exatamente um elemento então $\prod_\alpha A_\alpha$ tem um único elemento; ou seja é uma única função.

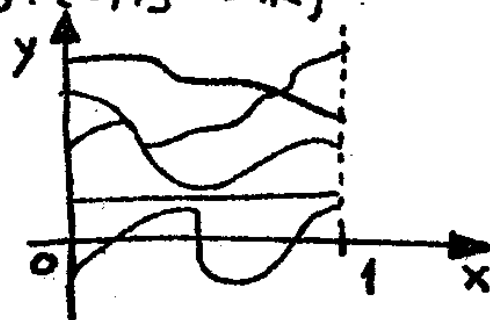
5. se $A = \emptyset$, então $\prod_\alpha A_\alpha$ tem apenas um elemento, a saber $\emptyset$.

6. Se cada $A_\alpha = B$, um conjunto fixo, então $\prod_\alpha A_\alpha$ é simplesmente o conjunto de todas as funções $f: A \rightarrow B$ e neste caso escrevemos $\prod_\alpha A_\alpha = B^A$.

7. SEJA $A_\alpha = \mathbb{R}$ (conjunto dos nros reais) e $A = [0,1]$ então pelo exemplo 6 temos que

$$\prod_\alpha A_\alpha = \prod_\alpha \mathbb{R} = \mathbb{R}^A = \{f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}\}$$

Uma representação gráfica pode ser vista ao lado.



(3)