

Prof. Jonas de Miranda Gomes

Notas de Aula

Fundamentos da Matemática Elementar

Primeira Parte:

1. A evolução do método axiomático
2. Modelos axiomáticos
3. Fonte dos axiomas
4. Análise do Método Axiomático
5. Consistência de um sistema de axiomas
6. Independência dos Axiomas
7. Completividade de um sistema de axiomas
8. Vantagens do método axiomático
9. Desvantagens do método Axiomático
10. Bibliografia e Exercícios.

xxxxxxxxxxxxxxxxxxxx

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática

A Evolução do Método

1.1 - Se observarmos um texto de geometria elementar plana usado nas escolas secundárias, podemos encontrar dois grupos - fundamentais de asserções, um chamado 'Axiomas', e o otro 'Postulados'. O significado de cada uma dessas palavras pode ser explicado através de algumas observações tais como: "Um axioma é uma afirmação que dispensa explicação". "Um postulado é um fato geométrico tão simples e óbvio que podemos supor sua validade". Os axiomas podem conter afirmações tais como: "O todo é maior que cada uma de suas partes". "O todo é a soma de suas partes". "Coisas iguais a uma mesma coisa são iguais entre si". Observaremos que termos geométricos tais como "ponto" ou "linha" não aparecem nessas afirmações; em certo sentido os axiomas transcendem a geometria - são "verdades universais". Em contraste, os "postulados" provavelmente contém a afirmarções tais como: "Dois pontos distintos determinam uma e somente uma reta". "Uma reta pode ser extendida indefinidamente". "Se L é uma linha e P é um ponto não pertencente a L, en tão existe uma única reta paralela à reta L e passando por P" (Algumas definições de termos geralmente precedem essas afirmações).

Este agrupamento em "axiomas" e "postulados" tem suas origens na antiguidade. Em Aristoteles (384-321 A.C) encontramos o seguinte ponto de vista:

"Toda ciência dedutiva deve começar com princípios in demonstráveis; de outro modo, as etapas das demonstrações não teriam fim. Iestes princípios indemonstráveis alguns são (a) comuns a todas as ciencias, outros são (b) particular, ou peculiar a uma dada ciência; (a) os princípios comuns são os axiomas, mais comumente ilustrado pelo axioma que afirma: Se subtrairmos quantidades iguais de uma mesma quantidade, obteremos quantidades iguais. Em (b) nós temos as bases para o assunto - em estudo, cuja existencia devemos supor".

1.2 - Nos 'Elementos' de Euclides (escrito aproximadamente - 300a.C), os dois grupos aparecem denominados "Noções Comuns" e "Postulados". A partir destas afirmações e de um certo número de definições, Euclides demonstrou 465 teoremas em uma sequência lógica. Como já observamos acima Aristoteles e provavelmente outros estudiosos da época, tinham uma noção bem concebida da natureza de uma ciência dedutiva; vemos portanto que aparentemente este método de deduzir logicamente a partir de certas proposições não demonstradas, dadas no início, todas outras -