

3º EXERCÍCIO ESCOLAR DE ÁLGEBRA LINEAR

Prof. Jonas de Miranda Gomes

Aluno _____ Matrícula _____

Seja V um espaço vetorial e $Z(v, T)$ o subespaço T -cíclico de V gerado pelo vetor v . Suponhamos que $\dim Z(v, T) = k$. Sabemos que $v, Tv, \dots, T^{k-1}v$ formam uma base de $Z(v, T)$, e portanto são linearmente dependentes os vetores $v, Tv, \dots, T^{k-1}v, T^k v$. Mostre que existem escalares $c_0, c_1, \dots, c_{k-1}$, tais que

$$T^k v = -c_0 v - c_1 Tv - \dots - c_{k-1} T^{k-1} v \quad (I)$$

(1)

(valor 1 ponto)

Usando resultados vistos em classe, conclua de (1) que o polinômio anulador de v , p_v , é

$p_v(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_{k-1} x^{k-1} + x^k$, onde os coeficientes $c_0, \dots, c_{k-1}$, são os mesmos que aparecem em (I)

(2)

(valor 1 ponto)

Utilizando os resultados vistos em (1) e (2), calcule o T-anulador do vetor $v = (1, 0, 0)$, onde $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é o operador linear cuja matriz na base canônica é

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(3)

(valor 1 ponto)

Observe que vimos acima um método de calcular o T-anulador de um vetor v , p_v , sem que seja necessário obtermos a restrição do operador T ao subespaço $Z(v, T)$. Agora demonstre a proposição abaixo:

"Seja V um espaço vetorial de dimensão n , e $(v_1, \dots, v_n)$ uma base ordenada de V . Se T é um operador linear em V , então o polinômio mínimo de T é o mínimo múltiplo comum mônico dos polinômios anuladores dos vetores básicos: isto é

$$m(x) = \text{m.m.c} \{ p_{v_1}(x), \dots, p_{v_n}(x) \} \quad (\text{mônico})"$$

SUGESTÃO: Seja f o mínimo múltiplo comum mencionado, e m o polinômio mínimo do operador T . Mostre que f divide m e m divide f , e daí conclua...

(4)

(valor 2 pontos)

Temos com a proposição acima um método para obtermos o polinômio mínimo de um operador, sem que seja necessário obtermos o polinômio característico. Vamos aplicá-lo:

Considere o operador $T: R^3 \rightarrow R^3$ cuja matriz na base canônica é

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

tome a base canônica de R^3 , (e_1, e_2, e_3) , procedendo como em (3) calcule os polinômios anuladores dos vetores básicos e_1, e_2, e_3 .

(5)

(valor 1,5 pontos)

Utilizando o resultado do item (5), e a proposição do item (4), determine o polinômio mínimo, $m(x)$, do operador T .

(6)

(valor 1 ponto)

O operador do item (5) é diagonalizável? Porque?

(7)

(valor 0,5 ponto)

Encontre operadores lineares $E_1, \dots, E_k$ em R^3 (para um valor conveniente de k), de modo que

a) $E_1 + \dots + E_k = I$

b) $E_i E_j = 0$ se $i \neq j$

c) $E_i^2 = E_i$

d) $T = c_1 E_1 + \dots + c_k E_k$, onde $c_1, \dots, c_k$ são valores característicos de T , distintos.

(8)

(valor 1 ponto)

Obtenha agora a matriz na base canonica do operador T^n , onde n é um número inteiro e positivo.

(9)

(valor 0,5 ponto)

O operador T é nilpotente? justifique sua resposta.

(10)

(valor 0,5 ponto)