

3º Exercício

I A A

Nome: _____

Matrícula: _____

- ① Considere o grupo $GL_2(\mathbb{R}) = \{ A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \mid \det A \neq 0 \}$ com a multiplicação usual de matrizes.

$$\begin{aligned} \text{Seja } h : GL_2(\mathbb{R}) &\longrightarrow (\mathbb{R} - \{0\}, \cdot) \\ A &\longmapsto h(A) := \det(A) \end{aligned}$$

- h é um homomorfismo de grupos? Justifique!
- Determine $\text{Núcleo}(h)$.
- Determine $\text{Imagem}(h)$.

- ② Todo subgrupo de S_3 é normal? Justifique!

③ Seja $h : (\mathbb{Z}, +) \longrightarrow (\mathbb{Z}_2, +)$.

$$n \longmapsto \bar{n}$$

- Mostre que h é um homomorfismo de grupos.
- Determine o núcleo de h .

- ④ Considere o grupo $G = \{ a + bt + ct^2 \mid a, b, c \in \mathbb{R} \}$ dos polinômios de grau menor ou igual a 2, com a adição usual.

$$\begin{aligned} \text{Seja } h : G &\longrightarrow (\mathbb{R}, +) \\ p(t) &\longmapsto \left. \frac{dp(t)}{dt} \right|_{t=0} \end{aligned} \quad \text{"a derivada de } p(t) \text{ em } t=0\text{"}$$

- Mostre que h é um homomorfismo de grupos.
- Determine o núcleo de h .

⑤ Seja $SL_2(\mathbb{R}) = \{ A \in GL_2(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 1 \}$.

- Mostre que $SL_2(\mathbb{R}) \leq GL_2(\mathbb{R})$ (citado em ①).
- Mostre que $SL_2(\mathbb{R}) \trianglelefteq GL_2(\mathbb{R})$.