

NOME _____ NO _____

1) Prove, se for verdadeiro; dê contra-exemplo, se for falso.

(a) Seja M um espaço métrico e $X \subset M$. Então ∂X tem interior vazio.

~~FALSO~~ Seja $M = \mathbb{R}$ com a métrica usual e $X = \mathbb{Q}$, temos $\partial X = \mathbb{R}$

(b) Seja M um espaço métrico e $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função.

O conjunto $X = \{x \in M; f(x) > 0\}$ é aberto em M .

~~FALSO~~ Seja $M = \mathbb{R}$ com a métrica usual e $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definido por $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{se } -\infty < x < 0 \text{ ou } 1 < x < \infty \end{cases}$

Temos que $X = \{x \in \mathbb{R}; f(x) > 0\} = [0, 1]$ que não é aberto em $\mathbb{R}$

(c) Seja M um espaço métrico e sejam $x_1, x_2 \in M$. Então $B(x_1, 1)$ é isométrica a $B(x_2, 1)$

Seja $M = [0, 1] \cup \{2\}$ com a métrica induzida de $\mathbb{R}$

Temos $B(0, 1) = [0, 1)$ e $B(2, 1) = \{2\}$

~~FALSO~~ É claro que é impossível obter $f: [0, 1) \rightarrow \{2\}$ que seja

(d) Sejam V e W espaços vetoriais normados e $T: V \rightarrow W$ linear, contínua em $v_0 \in V$. Então T é contínua.

VERDADE

Basta provar que T é contínua em $0 \in V$.

Seja $\varepsilon > 0$. Como T é contínua em $v_0 \Rightarrow \exists \delta > 0$ tal que

$$\|v - v_0\| < \delta \Rightarrow \|Tv - Tv_0\| < \varepsilon$$

Dado $w \in V$ com $\|w\| < \delta$, seja $v = w + v_0$. Assim $\|w\| =$

$$\begin{aligned} &= \|w + v_0 - v_0\| = \|v - v_0\| < \delta \Rightarrow \|Tv - Tv_0\| = \|T(v - v_0)\| = \\ &= \|Tw\| < \varepsilon \end{aligned}$$

e assim T é contínua em $0 \in V$, o que equivale a T contínua em V .

(e) Todo espaço ^{metrizable} é reunião enumerável de subconjuntos limitados.

Qualquer que seja o espaço métrico M , temos

VERDADE

$$M = \bigcup_{n=1}^{\infty} B(x_0, n), \text{ onde } \underline{x_0} \in M \text{ é qualquer}$$

e uma bola $B(x_0, r)$ é um conjunto limitado porque

$$\text{diam } B(x_0, r) \leq 2r.$$

(4) Sejam M e N espaços métricos e $f: M \rightarrow N$ um homeomorfismo.
 Seja M' um subespaço métrico de M . A função $g: M' \rightarrow f(M')$
 $x \mapsto g(x) = f(x)$
 é um homeomorfismo.

~~Verdade~~ Como a restrição de uma função contínua é ainda contínua, temos que g é contínua. Analogamente, a inversa de g é contínua porque é a restrição de f^{-1} ao subespaço $f(M') \subset N$. Assim g é um homeomorfismo.

(9) Sejam $M = [0, 1)$ e $N = (0, 1)$ com a métrica usual $d(x, y) = |x - y|$.
 M e N são homeomorfos.

~~FALSO~~ Suponha que $f: [0, 1) \rightarrow (0, 1)$ seja um homeomorfismo.

Pelo item (4), a função $g: (0, 1) \rightarrow (0, 1) - f(0)$
 $x \mapsto g(x) = f(x)$

é um homeomorfismo. Mas, se g é contínua, então $g[(0, 1)]$ deve ser um intervalo, o que não está ocorrendo

pois que $(0, 1) - f(0) = (0, f(0)) \cup (f(0), 1)$ não é um intervalo.

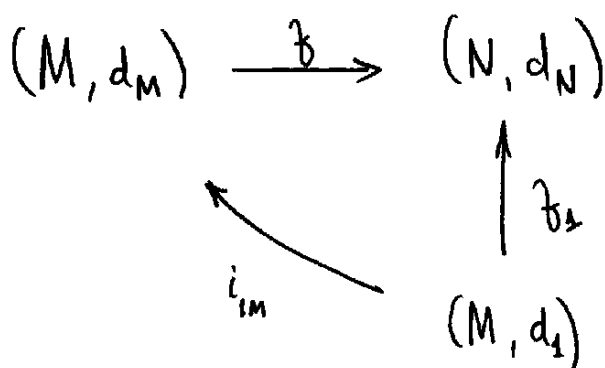
Assim, portanto f não pode ser homeomorfismo.

(h) Toda função $f: M \rightarrow N$ contínua é uma aplicação aberta.

Exemplo Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função nula
 $x \mapsto f(x) = 0$

Dado $A \subset \mathbb{R}$ aberto $f(A) = \{0\}$ que não é aberto de $\mathbb{R}$

2) Seja $f: (M, d_M) \rightarrow (N, d_N)$ uma bijeção. Mostre que se f é um homeomorfismo, então a métrica d_M é equivalente à métrica d_1 induzida em M por f .



$f_1: (M, d_1) \rightarrow (N, d_N)$ é uma isometria porque
 $x \mapsto f_1(x) = f(x)$ $d_1(x, y) = d_N(f(x), f(y))$

e daí f_1 é um homeomorfismo

Logo $i_M = f_1^{-1} \circ f: (M, d_1) \rightarrow (M, d_M)$ é um homeomorfismo