

Nome: _____ Nº _____

INTRODUÇÃO À ANÁLISE - 2ª PROVA

1) As seguintes afirmativas estão ERRADAS. Encontre contra-exemplos.

a) Sejam (x_n) e (y_n) seqüências de números reais tal que $\lim x_n = 0$. Então $\lim x_n y_n = 0$.

b) Se $\lim x_n = 0$ então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow \begin{cases} x_n \geq 0 \\ \text{ou} \\ x_n \leq 0 \end{cases}$

c) Sejam $a = \liminf x_n$ e $b = \limsup x_n$. Então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow a \leq x_n \leq b$.

d) Se $(I_\lambda)_{\lambda \in L}$ é uma família de intervalos abertos então $\bigcap_{\lambda \in L} I_\lambda$ é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}$.

e) Se $X' = \emptyset$ então X é finito.

f) Se X' é um conjunto infinito então X é não-enumerável.

g) Se $X \subset \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ é não-enumerável então X não pode ser fechado.

h) Se $F \subset \mathbb{R}$ é fechado então toda cobertura aberta de F admite uma subcobertura finita.

i) Se $X \subset \mathbb{R}$ é limitado, então toda cobertura aberta de X admite subcobertura finita.

j) Se $\lim x_n = \infty$ e $y_n > 0 \forall n$, então $\lim x_n y_n = \infty$.

2) Seja $X \subseteq \mathbb{R}$. Definimos os "abertos" de X como sendo os subconjuntos de X da forma $A \cap X$ onde A é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}$.

a) Defina os subconjuntos fechados de X e mostre que X é aberto e fechado (em X).

b) Seja $X = (0, +\infty)$. Mostre que $F = (0, 1]$ é fechado em X e dê exemplo de uma sequência (x_n) de termos de F que seja de Cauchy mas não converge em F .

c) Seja $X = (0, +\infty)$. Dizemos que $Y \subset X$ é compacto em X se toda cobertura aberta de Y admite subcobertura finita. Dê exemplo de um subconjunto $F \subset X$ fechado tal que $F \subset \mathbb{R}$ é limitado mas F não é compacto.