

UF PB - Departamento de Matemática

ANÁLISE I - 3ª VERIFICAÇÃO

Nome _____

1) DAR EXEMPLO DE:

a) Uma sequência $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f_i \neq f_j$
para $i \neq j$ e, para cada $x \in \mathbb{R}$,
$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = x$$

b) Uma sequência de funções $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ com
 $f_n(x) \neq \sin x \quad \forall n \in \mathbb{N}$ e (f_n) converge unifor-
memente para $f(x) = \sin x$.

c) Uma sequência de funções $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ simplesmente limitada que não seja uniformemente limitada.

d) Uma sequência de funções $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uniformemente limitada.

2a) Enunciar o teorema de Cantor-Tychonov.

2b) Enunciar o teorema de Ascoli-Arzelà

3) Seja $c > 0$ e considere

$$E_c = \left\{ f: [0,1] \rightarrow [0,1] ; f(0) = f(1) = 1 \text{ e } |f(x) - f(y)| \leq c|x - y| \right. \\ \left. \forall x, y \in [0,1] \right\}$$

Mostre que existe $f_0 \in E_c$ tal que

$$\int_0^1 f_0(x) dx \leq \int_0^1 f(x) dx \quad \forall f \in E_c.$$

4) Prove que são equivalentes as seguintes afirmações a respeito de uma sequência de funções $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

(i) a sequência converge uniformemente em todo subconjunto limitado de $\mathbb{R}$.

(ii) idem em todo subconjunto compacto de $\mathbb{R}$.

(iii) idem em todo intervalo compacto.