

A1) Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1 - e^{x^2}} \int_0^x e^{t^2} dt$

A2) Mostre que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{k} = \frac{2}{3}$

A3) Sejam $u, v: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ deriváveis e $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínua.

De uma fórmula para a derivada de

$$F(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt$$

A4) Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

Mostre que f é integrável em qualquer intervalo $[a, b]$ e dê o valor de $\int_{-1}^1 f(x) dx$.

B1) Seja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua e suponha que $\int_a^b f(x) \varphi(x) dx = 0$ para toda função integrável $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Mostre que $f(x) = 0 \quad \forall x \in [a, b]$.

B2) Dê exemplo de um conjunto limitado de medida nula que não tenha conteúdo nulo.

B3) Mostre que $X \subset \mathbb{R}$ compacto e $m(X) = 0$ implicam $c(X) = 0$

B4) Dê exemplo de uma função $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitada tal que

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| > \int_a^b |f(x)| dx$$

B5) Sejam $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínuas tais que $\int_a^x f(t) dt = \int_a^x g(t) dt$ $\forall x \in [a, b]$. Mostre que $f(x) = g(x) \quad \forall x \in [a, b]$.

c) Seja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ não-decrescente limitada. Mostre que, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ tal que $|P| < \delta \Rightarrow S(f, P) - s(f, P) < \varepsilon$