

Nome: _____

Mat.: _____

① Em cada caso abaixo diga se J é um ideal de $\mathbb{Q}[X]$.
Em caso afirmativo exiba $f(x) \in \mathbb{Q}[X]$ tal que $J = f(x) \cdot \mathbb{Q}[X]$,
e diga se J é ideal maximal ou não de $\mathbb{Q}[X]$. Justifique suas afirmações.

a) $J = \{f(x) \in \mathbb{Q}[X] ; f(1) = f(3) = 0\}$

b) $J = \{f(x) \in \mathbb{Q}[X] ; f(2) = 0 \text{ e } f(1) \neq 0\}$

c) $J = \{f(x) \in \mathbb{Q}[X] ; f(\sqrt{2}) = 0\}$

② Seja K um corpo e I, J ideais de $K[X]$. Mostre que
se $I \cap J = \{0\}$ então $I = \{0\}$ ou $J = \{0\}$

③ Diga quais dos polinômios abaixo são irredutíveis em $\mathbb{Q}[X]$.
Justifique suas afirmações.

a) $f(x) = x^3 + 17x + 36$; b) $f(x) = 2x^{10} - 28x^5 + 14x^2 + 35$

c) $f(x) = x^3 + 2x^2 + x + 1$; d) $f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

④ Seja $\mathbb{Z}[i] = \{a+bi ; a, b \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{C}$.

a) Mostre que $\mathbb{Z}[i]$ é um domínio de integridade

b) Denotando por K o corpo de frações de $\mathbb{Z}[i]$, mostre
que $K = \mathbb{Q}[i] = \{f(i) ; f(x) \in \mathbb{Q}[X]\}$.

⑤ Um número complexo α é dito um inteiro algébrico
se existe um polinômio mônico $f(x) \in \mathbb{Z}[X]$ tal que
 $f(\alpha) = 0$. Mostre que:

a) se α é algébrico (sobre $\mathbb{Q}$) então existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que

$m\alpha$ é um inteiro algébrico

b) $n \in \mathbb{Q}$ é um inteiro algébrico se, e só se, $n \in \mathbb{Z}$

c) se α é um inteiro algébrico e $m \in \mathbb{Z}$ então $\alpha + m$ e $m\alpha$ são inteiros algébricos.

⑥ Mostre que $\frac{\mathbb{Z}[x]}{x^2 \cdot \mathbb{Z}[x]}$ não é um domínio de integridade

⑦ a) Seja $\alpha \in \mathbb{C}$ um número algébrico. Mostre que $\mathbb{Q}[\alpha] = \{f(\alpha) ; f(x) \in \mathbb{Q}[x]\}$ é o menor subcorpo de $\mathbb{C}$ que contém $\mathbb{Q}$ e α

b) Sejam $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ números algébricos. Sejam $K_0 = \mathbb{Q}$, $K_1 = K_0[\alpha_1]$, $\dots$, $K_n = K_{n-1}[\alpha_n]$. É claro que $K_0 \subseteq K_1 \subseteq \dots \subseteq K_n$. Mostre que K_n é o menor subcorpo de $\mathbb{C}$ que contém $\mathbb{Q}, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. K_n é denotado por $K_n = \mathbb{Q}[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]$.

c) Mostre que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ é um número algébrico

d) Mostre que $\mathbb{Q}[\sqrt{2} + \sqrt{3}] = \mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$.

⑧ Um polinômio $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \in \mathbb{Z}[x]$ é dito primitivo se $(a_0, a_1, \dots, a_n) = 1$.

a) Mostre que se $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ então $f(x) = a g(x)$, onde $a \in \mathbb{Z}$ e $g(x) \in \mathbb{Z}[x]$ é um polinômio primitivo

b) Mostre que se $f(x), g(x) \in \mathbb{Z}[x]$ são polinômios primitivos então $f(x) \cdot g(x)$ também é primitivo.