

IME - Departamento de Matemática.

2ª Prova de Álgebra I - 01/12/81

Nome: Mat:

- ① Seja K um corpo e $f(x) \in K[x]$ um polinômio de grau n . Seja $L = \text{Gal}(f, K)$. Mostre que $[L:K] \leq n!$.
Dê exemplos em que $[L:K] = n!$ e $[L:K] < n!$.
- ② Determine $[L:\mathbb{Q}]$ nos casos abaixo, onde $L = \text{Gal}(f, \mathbb{Q})$:
- a) $f(x) = x^6 - 2$; b) $f(x) = x^7 - 2$
- ③ Verifique se $f(x)$ é irredutível em $K[x]$:
- a) $f(x) = x^5 + 2x^3 + 6x + 10$; $K = \mathbb{Q}[\sqrt[4]{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}]$
b) $f(x) = x^6 + x^5 + x^4 + \dots + x + 1$; $K = \mathbb{Q}[\sqrt[5]{2}]$.
- ④ Prove que:
- a) $|\text{Aut } \mathbb{Q}[\sqrt[4]{2}]| = 2$
b) $\text{Gal}(x^4 - 2, \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}[\sqrt[4]{2}, i]$
c) se $L = \text{Gal}(x^4 - 2, \mathbb{Q})$ então $|\text{Aut } L| = 8$
- ⑤ Sejam $f(x)$ e $g(x)$ polinômios irredutíveis em $\mathbb{Q}[x]$, tais que $\partial(f(x))$ e $\partial(g(x))$ são relativamente primos. Sejam α e β raízes de $f(x)$ e $g(x)$ respectivamente. Mostre que se $h(x) \in (\mathbb{Q}[\alpha, \beta])[x]$ e $h(\alpha) = h(\beta) = 0$, então $\partial(h(x)) \geq \partial(f(x)) + \partial(g(x))$.

⑥ a) Mostre que os polígonos regulares de 3 e 5 lados são construtíveis

b) Mostre que se os polígonos regulares de m e n lados são construtíveis, e se $(m, n) = 1$, então o polígono regular de mn lados é construtível.

c) Mostre que é possível trissecionar, com régua e compasso, o ângulo de 72° . (Sugestão: Use itens (a) e (b)).