

INSTITUTO CENTRAL DE MATEMÁTICA - UNIV. FED. DA PARAIBA
INTRODUÇÃO À TOPOLOGIA - EXAME FINAL - 3/2/1973

1) Sejam X um conj. não vazio e $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ topologias sobre X . Mostre que a aplicação identidade $i: (X, \mathcal{T}_1) \rightarrow (X, \mathcal{T}_2)$ é contínua se e somente se $\mathcal{T}_2$ é mais fraca que $\mathcal{T}_1$.

2) Sejam X esp. topológico. Prove que X é compacto se e só se para cada

A) família $\{F_i\}_{i \in I}$ de fechados em X com P.I.F. tem-se $\bigcap_{i \in I} F_i \neq \emptyset$.

B) Se $X = [0, 1]$ com a topologia $\mathcal{T} = \{\emptyset\} \cup \{A \subseteq X \mid |A| \text{ é finito}\}$, então $(X, \mathcal{T})$ é conexo, compacto, mas não é de Hausdorff.

3) A) Sejam $\mathbb{Z}$ o conj. dos inteiros e $p \in \mathbb{Z}$ p.p.o. finita que, dados dois inteiros distintos m, n , existe um ^{único} inteiro $t = t(m, n)$ tal que $m - n = p^t \cdot k$ onde k é um inteiro não divisível por p . Defina a função $d: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ por $d(m, m) = 0$ e $d(m, n) = 1/p^t$ se $m \neq n$. Prove que d é uma métrica sobre $\mathbb{Z}$. [SUGESTÃO: Se $a, b, c \in \mathbb{Z}$, então $t(a, b) \geq \min\{t(a, c), t(c, b)\}$].
Seja, agora, $p = 3$. Determine $S_2(0)$ e $S_{1/2}(0)$.

B) Considere o conjunto $\mathbb{Z}^+$ dos inteiros positivos. Para cada $m \in \mathbb{Z}^+$ defina $Q_m = \{m, m+1, m+2, \dots\}$ e seja $\mathcal{T} = \{\emptyset, Q_1, Q_2, \dots\}$. Mostre que $\mathcal{T}$ é uma topologia para $\mathbb{Z}^+$ e prove que $(\mathbb{Z}^+, \mathcal{T})$ não é metrizável.

4) A) Sejam X o conj. das funções contínuas de $[a, b]$ em $\mathbb{R}$, munido da métrica $d(f, g) = \int_a^b |f(t) - g(t)| dt$. Para cada $f \in X$, defina $\varphi(f) = \int_a^b f(t) dt$. Mostre que $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua.

B) Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 0$ se $x \leq a$ e $f(x) = 1$ se $x > a$. Mostre que f não é contínua em a mas é contínua nos demais pontos de $\mathbb{R}$.

5) A) Prove que o produto cartesiano de 2 espaços localmente conexos é localmente conexo.

B) $G \subseteq X$ (esp. métrico) é totalmente limitado $\iff \overline{G}$ é totalmente limitado

C) Mostre que um espaço métrico conexo contendo mais de um ponto é não enumerável. Conclua daí que todo espaço métrico enumerável é totalmente desconexo.

6º) A) Sejam A, B subconjuntos de um espaço topológico X . Prove que se A é conexo, B aberto e fechado, $A \cap B \neq \emptyset$, então $A \subseteq B$.
[SUGESTÃO: Suponha $A \not\subseteq B$ e use o conjunto $P = A \cap B$ e $Q = A \cap B^c$ para concluir que A é desconexo].

B) Prove que se $f: X \rightarrow Y$ é um homeomorfismo então $B \subseteq Y$ é uma componente conexa de Y se e só se $f^{-1}(B)$ é uma componente conexa de X . É verdade que $A \subseteq X$ é uma componente conexa de X se e só se $f(A)$ é uma componente de Y ? Justifique.

7º) A) Seja X esp. topológico. Mostre que se X é 2º enumerável então X é 1º enumerável. Vale a recíproca? Justifique.

B) Seja X esp. topológico. A função característica de um subconjunto $A \subseteq X$ é a função $\chi_A: X \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\chi_A(x) = 1$ se $x \in A$ e $\chi_A(x) = 0$ se $x \notin A$. Mostre que χ_A é contínua em $x_0 \in X$ se e somente se $x_0 \notin \text{fr} A$.

8º) A) Seja X espaço topológico e R uma relação de equivalência definida sobre X . Prove que se X é completamente regular então o espaço quociente X/R é completamente regular.

B) Seja $X = [0, 1]$ e R uma relação de equivalência sobre X , definida por: $x R y \Leftrightarrow x$ e y são ambos racionais ou ambos irracionais. Caracterize o espaço quociente X/R . Conclua daí que um espaço quociente obtido de um espaço de Hausdorff não é necessariamente um espaço de Hausdorff.

OBS. Em cada questão escolha apenas 1 item.

VALOR DAS QUESTÕES:

1º)	1,0 ponto
2º)	1,0 ponto
3º)	1,5 pontos
4º)	1,0 ponto

5º)	1,5 pontos
6º)	1,0 ponto
7º)	1,5 pontos
8º)	1,5 pontos