

**Textos de
Métodos Matemáticos**

18

A INTEGRAL DE LEBESGUE

L. A. MEDEIROS

E. A. de MELLO



A INTEGRAL DE LEBESGUE

por

Luis Adauto Medeiros

Professor da UFRJ

Eliel Amancio de Mello

Professor da UFPb

QUARTA EDIÇÃO

Rio de Janeiro – RJ

1989

SUMÁRIO

Prefácio da 4ª Edição	i
Prefácio	ii
INTRODUÇÃO	1
CAPÍTULO I—FUNÇÕES ESCADA	5
§1.A. Conjuntos de medida nula	5
§1.B. A integral de Riemann	7
§1.C. Integração das funções escada	14
§1.D. Retorno à integral de Riemann	28
CAPÍTULO II—INTEGRAL À LEBESGUE-RIESZ	34
§2.A. A integral de Lebesgue	34
§2.B. Sucessões de Funções	38
§2.C. A integral sobre um intervalo não limitado	49
CAPÍTULO III—CONJUNTOS E FUNÇÕES MENSURÁVEIS	52
§3.A. Conjuntos mensuráveis	52
§3.B. A integral sobre conjuntos mensuráveis	56
§3.C. O método de Lebesgue e sua comparação com o método de Riesz	59
§3.D. Teoremas de Egoroff e Lusin	66
CAPÍTULO IV—ESPAÇOS L^p; FUNÇÕES DE VÁRIAS VARIÁVEIS	73
§4.A. Os espaços L^p ; o teorema de Riesz-Fischer	73
§4.B. Os espaços L^∞	82
§4.C. Convergência fraca nos espaços L^p	84
§4.D. Funções de várias variáveis; o teorema de Fubini	90
CAPÍTULO V—DERIVAÇÃO	100
§5.A. Primitivas	100
§5.B. Funções monótonas	101
§5.C. Funções de variação limitada	108
§5.D. Determinação de uma função a partir de sua derivada	111
§5.E. Integração por partes e mudança de variáveis	117
BIBLIOGRAFIA	121

LUIZ ADAUTO MEDEIROS
ELIEL AMANCIO DE MELLO

A INTEGRAL DE LEBESGUE

TEXTO DIDÁTICO

SÉRIE MATEMÁTICA/1



EDITORA UNIVERSITÁRIA

APRESENTAÇÃO

Este texto é uma segunda tiragem, com algumas correções, da edição preliminar publicada pelo Instituto de Matemática da U.F.R.J., sob o título: Iniciação à Teoria da Integração.

Nesta nova tiragem resolvemos modificar o título que passou a ser: A Integral de Lebesgue. O motivo desta modificação é que o mesmo dá uma ideia melhor do conteúdo do livro, mesmo em nível elementar e destinado aos alunos dos últimos períodos dos cursos de graduação em matemática, física ou outros que necessitem de estudar o assunto, podendo, ainda, ser usado como bibliografia auxiliar em cursos de pós-graduação.

Maiores detalhes sobre a metodologia e os assuntos tratados encontram-se no prefácio da edição preliminar, que é reproduzido nesta segunda tiragem.

Agradecemos ao Prof. Paulo Pires Braga, chefe do gabinete do magnífico reitor da U.F.Pb., pelo empenho e colaboração - prestados, sem os quais não teria sido possível a inclusão deste nosso trabalho na coleção "Textos Didáticos" da U.F.Pb., aos professores Paulo Brito Braz e Silva e Jardimil Melo da Silva, chefe e sub-chefe do Departamento de Matemática da U.F.Pb., respectivamente, pelo apoio dado à iniciativa, à professora Neyde F. Ribeiro, da U.F.R.J., que tendo usado este texto num curso que teve ocasião de ministrar em seu Departamento de Matemática, nos apontou algumas falhas que foram corrigidas; a todos os colegas que direta ou indiretamente contribuíram através de críticas construtivas; finalmente, ao Prof. Alarico Correia Neto, diretor da Editora da UFPb., e seus auxiliares, pelo trabalho de impressão.

L. A. Medeiros - E.A. Mello