

INTRODUÇÃO À ANÁLISE REAL — EXERCÍCIOS

- 1º) a) Se $f: A \rightarrow B$ e $g: A \rightarrow B$ são biunívocas, então $g \circ f$ é biunívoca?
 b) Se f não é biunívoca é possível que $g \circ f$ seja biunívoca?
 c) Dê um exemplo onde f é biunívoca, g não é biunívoca mas se tem $g \circ f$ biunívoca.

- 2º) Seja P_n o conjunto das funções polinômiais f de grau n , definidas em $\mathbb{C}$, $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$, onde n é um inteiro não negativo (fixo) e os coeficientes $a_0, a_1, \dots, a_n$ são todos inteiros. Prove que P_n é enumerável (Use indução).

- 3º) Prove que o conjunto de todas as funções polinômiais com coeficientes inteiros é enumerável.

- 4º) Um número $x \in \mathbb{C}$ é dito algébrico se é raiz de algum polinômio com coeficientes inteiros. Prove que o conjunto de todos os números algébricos em $\mathbb{C}$ é enumerável.

- 5º) Dois conjuntos A e B dizem-se equipotentes se podem ser postos em correspondência biunívoca, isto é, exista uma aplicação $f: A \rightarrow B$ biunívoca e sobre. Mostre que o intervalo $(0,1)$ e $[0,1]$ são equipotentes. (SUGESTÃO: Considere separadamente os racionais e os irracionais)

- 6º) Mostre que se A e B são conjuntos enumeráveis, então o produto cartesiano $A \times B$ é enumerável. Por indução conclua que se os conjuntos $A_1, A_2, \dots, A_n$ são enumeráveis, então $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ é enumerável.

- 7º) a) Se Y é enumerável e $f: X \rightarrow Y$ é injetora, então X é enumerável.
 b) Se X é enumerável e $f: X \rightarrow Y$ é sobrejetora, então Y é enumerável.
 c) Se $f: X \rightarrow Y$ é tal que $f(X)$ é não enumerável, então X é não enumerável.

8º) Se X é um conjunto enumerável, então a coleção de todos os subconjuntos finitos de X é enumerável.

9º) Qualquer que seja o conjunto X , é impossível haver uma correspondência biunívoca entre X e $P(X)$, isto é, o conjunto X e $P(X)$ nunca são equipotentes. SUGESTÃO: Considere uma aplicação $f: X \rightarrow P(X)$ e mostre que o conjunto $A = \{x \in X \mid x \notin f(x)\}$ não é imagem de elemento algum de X por f . Observe que $A \subset X$ mas $A \in P(X)$.

10º) Considere o conjunto K de todos os números $x \in [0, 1]$ que tem uma representação ternária (na base 3) sem conter o algarismo 1. Por exemplo, o número $\frac{1}{3} = 0,0222\ldots (3)$ e $\frac{2}{3} = 0,2000\ldots (3)$ estão em K , mas qualquer x tal que $\frac{1}{3} < x < \frac{2}{3}$ não está em K (pois um tal x só pode ser escrito na base 3 como $0,1b_2b_3\ldots (3)$). O conjunto K é chamado o conjunto de Cantor. Para todo $x = 0,b_1b_2b_3\ldots (3)$ em K (onde os b_i são 0 ou 2), defina $f(x) = y = 0,a_1a_2a_3\ldots (2)$ onde $a_i = b_i/2$. Por exemplo se $x = \frac{1}{3} = 0,0222\ldots (3)$ então $f(x) = y = 0,0111\ldots (2)$. Então $f: K \rightarrow [0, 1]$ é uma função. Mostre que f é sobrejetiva e como consequência, conclua que K é não enumerável.

Apenas, a título de curiosidade, observamos que o conjunto de Cantor pode ser definido de outra maneira. O conjunto de Cantor K é o que resta do intervalo $[0, 1]$ depois da seguinte operação: Retira-se o terço médio aberto $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ do intervalo $[0, 1]$; retira-se depois o terço médio aberto de cada um dos intervalos restantes $[0, \frac{1}{3}]$ e $[\frac{2}{3}, 1]$. Sobra então $[0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$; em seguida retira-se o terço médio aberto de cada um desses intervalos e repete-se o processo indefinidamente. O conjunto dos pontos não retirados é o conjunto de Cantor. Observe que a soma dos comprimentos dos intervalos retirados é 1 e que estes intervalos são disjuntos. Muita coisa curiosa pode-se dizer do conjunto K .