

INTRODUÇÃO À ANÁLISE REAL — LISTA DE EXERCÍCIOS

1º) $a, b \in \mathbb{R}$, $ab = 0 \iff a = 0$ ou $b = 0$ (sugestão: use $1 = V$ e $1 = VI$)

2º) Prove que $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tem-se:

I) $-(a-b) = b-a$

II) $(a-b) + (c-d) = (a+c) - (b+d)$

III) $(a-b)c = ac - bc$

IV) $(-a) \cdot (-b) = ab$

3º) Prove que:

I) $a-x < a-y \iff x > y$

II) $a < b < 0 \implies \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

III) $a < 0 \implies \frac{1}{a} < 0$

4º) Prove que todo subconjunto S de números reais, não vazio e cotado inferiormente possui ínfimo.

SUGESTÃO: Considere o conjunto $S^* = \{x \in \mathbb{R} \mid -x \in S\}$

5º) Encontre o supremo e o ínfimo de cada um dos seguintes conjuntos (se existirem):

I) $\{\frac{1}{3}, \frac{4}{9}, \frac{13}{27}, \frac{40}{81}, \dots\}$

II) $\{\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \dots\}$

III) $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 1\}$

IV) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2 < 0\}$

V) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2 > 0\}$

VI) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}$

6º) Sejam S_1 e S_2 conjuntos de números reais tais que $\sup S_1 = b_1$; $\sup S_2 = b_2$. Qual é o supremo de cada um dos seguintes conjuntos?

I) $\{x+y \mid x \in S_1, y \in S_2\}$

II) $S_1 \cup S_2$

7º) Prove que se $S \subset \mathbb{R}$ é um conjunto cotado, não vazio, então tem-se $\inf S \leq \sup S$. Quando é que ocorre a igualdade?

8º) Sejam a, b números racionais, $a < b$. Prove que existe um número x irracional, tal que $a < x < b$.

9º) Sejam a, b números irracionais, $a < b$. Prove que existe um número y racional, tal que $a < y < b$.

10º) Prove que todo número real positivo possui exatamente duas raízes quadradas.

11º) Prove que toda coleção de conjunto aberto, não-vazios, dois a dois, disjuntos, em $\mathbb{R}$, é enumerável.

12º) Prove que:

I) Se $A_1, A_2, \dots, A_n$ são subconjuntos abertos de $\mathbb{R}$, então, $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$ é aberto.

II) Se $(A_\alpha)_{\alpha \in L}$ é uma família qualquer de subconjuntos abertos $A_\alpha \subset \mathbb{R}$, então tem-se que $A = \bigcup_{\alpha \in L} A_\alpha$ é aberto.

Dê exemplo de uma família enumerável $B_1, B_2, \dots, B_n, \dots$ de abertos em $\mathbb{R}$ tal que $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$ não é aberto. Enuncie e demonstre o análogo de (I) e (II) para conjuntos fechados e dê exemplo de uma coleção enumerável de fechados $F_1, F_2, \dots, F_n, \dots$ em $\mathbb{R}$ tal que $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ não é fechado.

13º) Dado um subconjunto $X \subset \mathbb{R}$, chama-se fecho de X ao conjunto $\bar{X}$ formado por todos os limites $x = \lim x_n$ de seqüências de pontos de X .

I) Prove que $\bar{X} = X \cup X'$ e que $\bar{X}$ é fechado

II) $X = \bar{X} \iff X$ é fechado

III) $(\bar{X})' = X'$; $\overline{X'} = \bar{X}$

14º) Dado um subconjunto $X \subset \mathbb{R}$, chama-se interior de X ao conjunto $\overset{\circ}{X}$ formado por todos os pontos interiores de X .

I) X é aberto $\iff X = \overset{\circ}{X}$

II) $\overset{\circ}{X} \subset X' \subset \bar{X}$. Dê um exemplo onde $\bar{X} \neq X'$ e $X' \neq \overset{\circ}{X}$

15º) Sejam $X \subset \mathbb{R}$ um subconjunto não vazio cotado superiormente e $Y \subset \mathbb{R}$ um subconjunto não vazio cotado inferiormente. Suponha que X e Y são fechados e prove que $\sup X \in X$ e $\inf Y \in Y$.

16º) Determine $\bar{X}$, X' e $\overset{\circ}{X}$ para cada um dos conjuntos X abaixo:

Ⓘ $X = [a, b]$; Ⓡ $X = (a, b)$; Ⓢ $X = \mathbb{Q}$; ⓘ $X = \mathbb{Z}$

Ⓥ $X = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\}$; Ⓡ $X = (a, b) \cup \{c\}$ onde $c \notin [a, b]$

$X = K$ (o conjunto de Cantor).