

INTRODUÇÃO À ANÁLISE REAL — 3ª LISTA DE EXERCÍCIOS

1º) Mostre que todo número real é limite de uma sequência de números transcendentes, dois a dois distintos, (OBS. — Um número real é dito transcendente quando não é algébrico).

2º) Obtenha uma cobertura do conjunto $[0, +\infty)$ por intervalos abertos, a qual não possui subcobertura finita. Faça o mesmo com o conjunto $(0, 1)$. Isto contradiz o Teorema de Borel-Lebesgue? Justifique.

3º) Prove que as seguintes afirmações a respeito de um subconjunto $X \subset \mathbb{R}$ são equivalentes:

- I) X é cotado ; II) Todo sub-conjunto infinito de X possui um pto. de acumulação ;
 III) Toda sequência de elementos $x_n \in X$ possui uma subsequência convergente.

4º) Prove que se $\{x_n\}$ é uma sequência de números reais tais que $x_n \rightarrow b$ e $x_n \leq a \quad \forall n$ Então $b \leq a$

5º) Prove que se $\{x_n\}$ é uma sequência de números reais tais que $x_n \leq x_{n+1} \quad \forall n$ e $\exists M > 0$ tal que $|x_n| \leq M \quad \forall n$, isto é, $\{x_n\}$ é cotada. Então $\{x_n\}$ é convergente e $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq M$.

6º) Prove que se $K \subset \mathbb{R}$ é compacto e $F_1 \supset F_2 \supset \dots \supset F_n \supset \dots$ é uma sequência decrescente de sub-conjuntos fechados e não-vazios de K , então a interseção $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ é não-vazia. Dê exemplo de um conjunto fechado e não cotado para o qual a conclusão acima falha.

7º) Seja $F \subset \mathbb{R}$ um subconjunto compacto tal que todo ponto $x \in F$ é ponto de acumulação de F , isto é, $F = F'$. Prove que F é não enumerável.
SUGESTÃO: Dada uma sequência qualquer de pontos de F , $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, mostre que o conjunto $\{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\} \neq F$. Para isto construa uma seqüência decrescente de subconjuntos cotados, fechados e não vazios $F_1 \supset F_2 \supset \dots \supset F_n \supset \dots$ tais que $a_n \notin F_n$ para cada n . Tome $F_0 = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$. Observe que, pelo exercício anterior, F_0 é um subconjunto não vazio de F e que $a_n \notin F_0$ para todo n .

8º) Seja $(I_\lambda)_{\lambda \in L}$ uma família de intervalos. Prove que a interseção $I = \bigcap_{\lambda \in L} I_\lambda$ é um intervalo ou o subconjunto vazio de $\mathbb{R}$. Dê exemplo de uma sequência decrescente de intervalos fechados $I_1 \supset I_2 \supset \dots \supset I_n \supset \dots$ tais que $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \emptyset$.

9º) Seja $X \subset \mathbb{R}$ um subconjunto qualquer. Prove que toda cobertura $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$, onde os A_λ são abertos, admite uma subcobertura finita enumerável.

SUGESTÃO: Se x é um ponto interior de um aberto A , então existem números racionais $r < s$ tais que $x \in (r, s)$ e $(r, s) \subset A$.

10º) Seja $\{r_1, r_2, \dots, r_n, \dots\}$ uma enumeração dos racionais contidos no intervalo $[0, 1]$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideramos o intervalo aberto $I_n = (r_n - \frac{1}{2^{n+1}}, r_n + \frac{1}{2^{n+1}})$. Responda (e justifique) se o intervalo I_n constituem uma cobertura de $[0, 1]$.

SUGESTÃO: Aplique o Teorema de Borel-Lebesgue e some o comprimento dos intervalos da subcobertura.

11º) Mostre diretamente que a sequência $\{\frac{n+1}{n}\}$ é de Cauchy.
