

§1 - DEFINIÇÃO E PROPRIEDADES

Sejam $X \subset \mathbb{R}$ e $f: X \rightarrow \mathbb{R}$. Consideremos $a \in X'$, isto é, a é ponto de acumulação de X . Diremos que o limite de $f(x)$ quando x tende para a é o número real L quando, para cada $\varepsilon > 0$ for possível obter $\delta > 0$ tal modo que se tenha $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $0 < |x - a| < \delta$, $x \in X$. Em símbolos:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que } x \in X \text{ e } 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Note-se que $0 < |x - a| < \delta$ significa que $x \in (a - \delta, a + \delta)$ e $x \neq a$. Assim, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ significa que para todo intervalo aberto $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ existe um intervalo aberto $(a - \delta, a + \delta)$ tal que $x \in X \cap (a - \delta, a + \delta)$ e $x \neq a$ implica $f(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$. Mesmo que se tenha $a \in X$, a afirmação $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ nada diz a respeito do valor $f(a)$. Ela apenas traduz o facto de que é possível tornar $f(x)$ arbitrariamente próximo de L desde que se torne x suficientemente próximo (porém diferente) de a . Deve-se chamar a atenção para o facto de que $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ só tem sentido quando a é um ponto de acumulação de X , isto é, do domínio de f . Por outro lado não é necessário que a pertença ao domínio de f (o ponto a deve pertencer ao conjunto dos pontos de acumulação do domínio de f).

PROPOSIÇÃO 1 (unicidade do limite): ••

Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in X'$. Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1$ e $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_2$ então $L_1 = L_2$.

Demonstração: Dado qualquer $\varepsilon > 0$, $\exists \delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que, para x $0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L_1| < \varepsilon/2$ e $0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - L_2| < \varepsilon/2$. Como $a \in X'$, podemos obter $x^* \in X$ tal que $0 < |x^* - a| < \delta$ onde $\delta = \min \{ \delta_1, \delta_2 \}$. Então $|L_1 - L_2| \leq |f(x^*) - L_1| + |f(x^*) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Portanto temos $|L_1 - L_2| < \varepsilon$ qualquer que seja o número real $\varepsilon > 0$. Isto $|L_1 - L_2| = 0$ e consequentemente $L_1 - L_2 = 0$, donde $L_1 = L_2$. C.Q.D.

PROPOSIÇÃO 2:

Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in X'$. Dado $Y \subset X$ tal que $a \in Y'$ ponhamos $g = f|_Y$. Se for $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, tem-se ainda $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$.

Demonstração: Evidente.

PROPOSIÇÃO 3: Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in X'$. Se existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, então f é cotada numa vizinhança de a , isto é, existem $\delta > 0$ e $M > 0$ tais que, $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x)| < M$.

Demonstração:

Tomemos $\varepsilon = 1$ na definição de limite. Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, existe $\delta > 0$ tal que $x \in X$, $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < 1 \Rightarrow |f(x)| < 1 + |L|$. Fazendo $M = |L| + 1$, a proposição fica demonstrada.

PROPOSIÇÃO 4: Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f, g, h: X \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in X$. Se tivermos $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ para todo $x \in X$, $x \neq a$ e, além disso $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$, então $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$.

Demonstração: Dado $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que $x \in X$, $0 < |x - a| < \delta$ implica $f(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ e $h(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$. Como $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, segue-se que $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow g(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$. Portanto $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$.

PROPOSIÇÃO 5:

Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$; $a \in X'$. Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = S$; com $L < S$, então existe $\delta > 0$ tal que $x \in X$, $0 < |x - a| < \delta$ implica $f(x) < \frac{L+S}{2} < g(x)$.

Demonstração: Seja $\varepsilon = \frac{S-L}{2} > 0$. Então $L + \varepsilon = \frac{L+S}{2} = S - \varepsilon$. Existe $\delta > 0$ tal que $x \in X$, $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ e $g(x) \in (S - \varepsilon, S + \varepsilon)$ donde $f(x) < \frac{L+S}{2} < g(x)$. C.Q.D.

COROLÁRIO 1. Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L > 0$, então $\exists \delta > 0$ tal que $x \in X$, $0 < |x - a| < \delta$ implica $f(x) > 0$.

COROLÁRIO 2. Se $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in X$, $x \neq a$ e $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = S$, então $L \leq S$.

Demonstração: Suponha $L > S$ e aplique a proposição 5 para concluir que $g(x) < f(x)$ numa vizinhança de a , contradizendo a hipótese. C.Q.D.

PROPOSIÇÃO 6: Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in X'$. Para que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ é necessário e suficiente que se tenha $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = L$ para toda sequência de números $x_n \in X - \{a\}$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

Demonstração:

Suponhamos que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $x_n \in X - \{a\}$. Dado $\varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ tal que $0 < |x - a| < \delta$, $x \in X \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$. Existe também $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > m_0 \Rightarrow |x_n - a| < \delta$. Segue-se que $n > m_0 \Rightarrow |f(x_n) - L| < \varepsilon$, donde $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = L$ quando $n \rightarrow \infty$. (continua)

Proposição 13 (Teorema do valor intermediário).

22

Seja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua.

Se $f(a) < d < f(b)$, então existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = d$.

Demonstração: Como f é contínua, dado $\varepsilon = d - f(a) > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $a \leq x \leq a + \delta \Rightarrow f(x) < f(a) + \varepsilon = d$. Assim, todos os pontos x suficientemente próximos de a no intervalo $[a, b]$ são tais que $f(x) < d$. De maneira análoga se verifica que todos os pontos y suficientemente próximos de b no intervalo $[a, b]$ são tais que $f(y) > d$. Em particular, os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b, f(x) < d\}$ e $B = \{y \in \mathbb{R} \mid a < y < b \text{ e } f(y) > d\}$ são ambos não vazios. Como f é contínua, os conjuntos A e B são ambos abertos. Se não existisse um ponto $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = d$, teríamos $(a, b) = A \cup B$, o que é absurdo, pois $A \cap B = \emptyset$ (vide teorema de estrutura dos abertos em $\mathbb{R}$).

Corolário: Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo. Se $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua, então $f(I)$ é um intervalo.

Proposição 14 Sejam $X \subset \mathbb{R}$ compacto e $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. Então $f(X)$ é compacto.

Demonstração: Seja $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ uma cobertura aberta de $f(X)$. Para cada $x \in X$ podemos escolher $A_{\lambda(x)}$ tal que $f(x) \in A_{\lambda(x)}$. Em virtude da continuidade de f existe, para cada $x \in X$ um intervalo I_x de centro x , tal que $y \in X \cap I_x \Rightarrow f(y) \in A_{\lambda(x)}$. Obtemos assim uma cobertura aberta $(I_x)_{x \in X}$. Como X é compacto, podemos extrair uma subcobertura finita e portanto $X \subset I_{x_1} \cup \dots \cup I_{x_n}$. Consequentemente $f(X) \subset A_{\lambda(x_1)} \cup \dots \cup A_{\lambda(x_n)}$, o que prova a compacidade de $f(X)$.

Segunda demonstração: Seja (y_m) uma sequência em $f(X)$. Para cada m , existe $x_m \in X$ tal que $f(x_m) = y_m$. Como X é compacto, podemos obter uma subsequência convergente $x_{n_k} \rightarrow x \in X$. Sendo f contínua, temos:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(x) = y \in f(X). \text{ Logo } f(X) \text{ é compacto.}$$

Corolário: (Weierstrass). Seja $X \subset \mathbb{R}$ compacto.

Toda função contínua $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ é cotada e atinge seus extremos, isto é, existem $x_1, x_2 \in X$ tais que $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$, para todo $x \in X$.

Com efeito, $f(X)$ é cotado e fechado, logo $\sup f(X) \in f(X)$ e $\inf f(X) \in f(X)$. Portanto existem $x_1, x_2 \in X$ tais que $f(x_1) = \inf f(X)$ e $f(x_2) = \sup f(X)$.

Exemplos: A função $f: (-1, +1) \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$ é

contínua e sobrejetiva. Logo não é cotada. Motivo: seu domínio é um conjunto cotado mas não fechado. Por outro lado, a função $g: (-1, +1) \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $g(x) = x$, é contínua e cotada mas não assume um valor máximo, nem um valor mínimo, no seu domínio $(-1, +1)$. A função $h: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$h(x) = \frac{1}{1+x}$ é contínua e cotada. Assume seu valor máximo no ponto

$x=0$ mas não existe $x \in [0, \infty)$ tal que $h(x)=0 = \inf \{h(x) \mid x \in [0, \infty)\}$. Motivo: o domínio de h é um subconjunto fechado mas não cotado de $\mathbb{R}$.

Proposição 15 Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo. Se $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua e injetiva então f é (estritamente) monótona. Neste caso, pondo $J = f(I)$, J é um intervalo e $f^{-1}: J \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua.

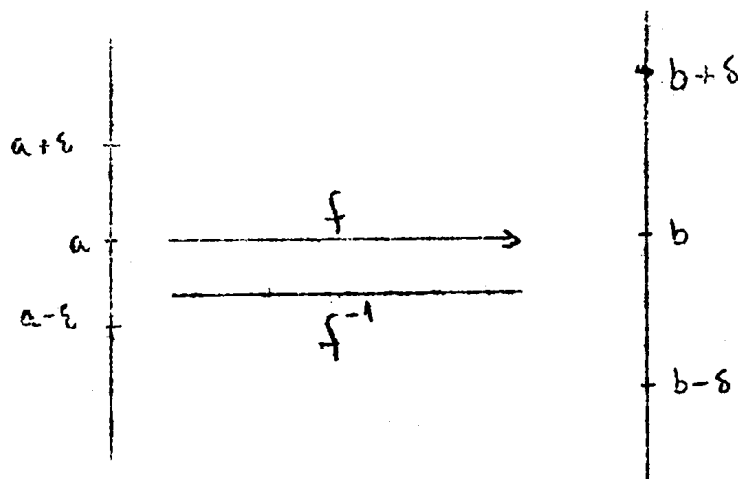
Demonstração: Se f não fosse monótona, existiriam números $a < b < c$ em I com $f(a) < f(b)$ e $f(b) > f(c)$ ou então com $f(a) > f(b)$ e $f(b) < f(c)$. (Isto é um exercício sobre desigualdades).

Considerando apenas o 1º caso. Ai podemos ter $f(a) < f(c) < f(b)$ ou $f(c) < f(a) < f(b)$. Na primeira hipótese existiria (pelo teorema do valor intermediário) um $x \in (a, b)$ tal que $f(x) = f(c)$, o que viola a injetividade de f . Na segunda hipótese, haverá $y \in (c, b)$ tal que $f(y) = f(a)$, o que também contradiz que f seja injetiva. Assim, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ é monótona.

Seja $J = f(I)$. Sabemos que J é um intervalo e que $f: I \rightarrow J$ é uma bijeção que preserva a ordem. Ainda, para fixar as idéias suponhamos que f seja crescente. Provemos que sua inversa

$f^{-1}: J \rightarrow I$ é contínua. Consideremos um ponto $b \in J$. Suponhamos que b é interior a J . Seja $a = f^{-1}(b)$. Então a é interior a I . Dado $\varepsilon > 0$, podemos diminuí-lo de modo que $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset I$.

A função f transforma bijetiva e crescentemente o intervalo $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ num intervalo aberto I contendo b e portanto contendo $(b - \delta, b + \delta)$, para algum $\delta > 0$.



Segue-se que $\forall t \in I$ e $f(t) \in (b - \delta, b + \delta)$ então $t \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. Em outras palavras $x \in (b - \delta, b + \delta) \Rightarrow f^{-1}(x) \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. Isto prova a continuidade de f^{-1} em b . Se b for o extremo inferior do intervalo I então b será o extremo inferior de I . Então tomaremos $[a, a + \varepsilon) \subset I$ e $f([a, a + \varepsilon)) = [b, b + \delta)$.

Exemplos: Dado $n \in \mathbb{Z}^+$, definimos $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ pondo $f(x) = x^n$.

Então f é contínua, $f(0) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, como

se vê facilmente. Além disso, $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$.

Logo $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ é uma bijeção. Pela proposição acima

$f^{-1}: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ é contínua. Escreve-se $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$. Assim fica provada a existência de $\sqrt[n]{x}$ para todo $x > 0$ e a continuidade de $x \mapsto \sqrt[n]{x}$.

CONTINUIDADE UNIFORME

Seja $X \subset \mathbb{R}$. Uma função $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ chama-se uniformemente contínua se dado qualquer $\varepsilon > 0$, podemos obter $\delta > 0$ tal que $x, y \in X$, $|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$. A diferença entre a mera continuidade e a continuidade uniforme é sutil. Essencialmente, $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua quando, dados $\varepsilon > 0$ e $x \in X$ podemos obter $\delta > 0$ (dependendo do $\varepsilon > 0$ e do ponto $x \in X$) de modo que

$y \in X$, $|y - x| < \delta \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon$. Na continuidade uniforme o δ depende apenas do ε e não do x .