

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA - U.F.Pb. - PERÍODO 832  
ANÁLISE REAL II - PROVA DE REPOSIÇÃO - 19/12/83

ALUNO: \_\_\_\_\_ MATR. \_\_\_\_\_

1º) Definir convenientemente os seguintes conceitos:

- A) Parte positiva e parte negativa de uma função  $u$
- B) Truncada de uma função  $u$  por uma função  $v \geq 0$
- C) Conjunto de medida nula.
- D) Função simples num intervalo não limitado

2º) Enunciar o seguintes resultados

- A) Primeiro Lema Fundamental
- B) Lema de Fatores
- C) Teorema da convergência dominada (de Lebesgue)

3º) Use o teorema de Beppo Levi para mostrar que se  $u: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  é tal que  $u \geq 0$  e  $\int_a^b u = 0$ , então  $u = 0$  quase sempre.

4º) Mostre que a função  $u: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $u(x) = \frac{1}{x^p}$  é mensurável  $\forall p \in \mathbb{R}$  mas não é integrável se  $p \geq 1$ .

5º) Mostre, por meio de um exemplo, que se  $v \in L(a, b)$  não se tem necessariamente  $v^2 \in L(a, b)$ .

6º) Se  $(u_n)$  é uma sucessão de funções mensuráveis que converge quase sempre para uma função  $u$  em  $(a, b)$  então  $u$  é mensurável. Prove isto.