

EXAME FINAL: PROVA ESCRITA - 2ª Época,

CADEIRA: TOPOLOGIA I

QUESTÕES PROPOSTAS

- 1) Diga quais dos conjuntos A abaixo são abertos, fechados, compactos e conexos, nos espaços métricos M indicados:

$$A = (0, 1) \times \mathbb{Q} \subset M = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

$$A = [0, 1] \times \mathbb{Q} \subset M = \mathbb{R} \times \mathbb{Q}$$

$$A = \mathbb{Q} \times \mathbb{Z} \subset M = \mathbb{R} \times \mathbb{Q}$$

$$A = (0, 1) \cup (1, +\infty) \subset M = (-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$$

- 2) Seja $B(X)$ o conjunto das funções limitadas definidas em $X \subset M$ e com valores reais. Defina $d(f, g) = \sup_{x \in X} \{ |f(x) - g(x)| \}$.

Verifique que d é uma métrica em B .

- 3) Mostre que toda intersecção de conjuntos fechados é fechada. Tente a mesma prova para intersecções quaisquer de abertos e indique o ponto em que a mesma deixa de valer.
- 4) Mostre que todo compacto é limitado e fechado. A recíproca é verdadeira? Explique-se.
- 5) Defina continuidade uniforme e mostre que uma função contínua num compacto é uniformemente contínua.
- 6) Dada $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ com $f(x) = \frac{1}{x}$, mostre que f não é uniformemente contínua em $(0, \theta)$ para nenhum $\theta > 0$ mas que f será uniformemente contínua em $(\theta, +\infty)$ para todo $\theta > 0$.

- 7) Demonstre que a imagem de um conexo, por uma função contínua, será também conexo.
- 8) Dê um exemplo de uma aplicação $f: (0,1) \rightarrow (0,1)$ que seja sobre e que não tenha pontos fixos.
- 9) Mostre que toda aplicação contínua do círculo na reta é tal que existem dois pontos diametralmente opostos que tenham a mesma imagem.
- 10) Mostre que a união de dois conexos por arcos que tenham um ponto comum é também conexo por arcos. Faça o mesmo para conexos.
- João Pessoa, 20/8/1971
 José Cleobaldo Lebrança,