

3/4/1971.

Ⓐ Considere os conjuntos indicados por  $A$  abaixo e diga se são abertos ou fechados nos espaços métricos indicados a seguir.

1.  $A = \left\{ \frac{1}{n} ; n \in \mathbb{N} \right\}$   $M = \mathbb{R}$
2.  $A = \left\{ \frac{1}{n} ; n \in \mathbb{N} \right\}$   $M = (0, 1]$
3.  $A = \left\{ \frac{1}{n} ; n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{0\}$   $M = [0, 1]$
4.  $A = (0, 1)$   $M = (-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$
5.  $A = (0, 1]$   $M = (0, +\infty)$
6.  $A = \mathbb{Q}$   $M = \mathbb{R}$
7.  $A = \mathbb{R} \times \{0\}$   $M = \mathbb{R}^2$
8.  $A = (0, 1) \times \{0\}$   $M = \mathbb{R}^2$
9.  $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$   $M = \mathbb{R}^2$
10.  $A = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0)\}$   $M = \mathbb{R}^2$
11.  $A = \mathbb{R} \times \mathbb{Q}$   $M = \mathbb{R}^2$
12.  $A = [0, 1] \times \{0\}$   $M = \mathbb{R}^2$ .

Justifique completamente as respostas. As métricas são sempre dadas pela distância usual.

Ⓑ Achar o interior de cada conjunto  $A$  indicado nos itens 1, 6, 7, 8, 9 e 11 do problema anterior.

Ⓒ Seja  $F_1 = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ . Obtem-se a partir dele um conjunto  $F_2 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$  removendo o "terço médio", isto é, removendo o intervalo (aberto)  $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ . Então  $F_2 = [0, 1] - (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ . A partir de  $F_2$  remova-se os terços médios abertos de cada intervalo  $[0, \frac{1}{3}]$  e  $[\frac{2}{3}, 1]$  para obter um conjunto  $F_3$ . Considere o processo.

so se repetindo indefinidamente, O conjunto assim obtido (denominado "conjunto de Cantor") é fechado. Prove isto.

① Se  $A$  e  $B$  são subconjuntos de um espaço métrico  $M$ , prove que

$$\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} = \overset{\circ}{A \cap B} \quad \text{e} \quad \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subset \overset{\circ}{A \cup B}.$$

Dê um exemplo na reta que mostre que em geral  $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \neq \overset{\circ}{A \cup B}$ .

⑤ Certo ou errado?

1. Uma união qualquer de abertos é aberta.
2. Uma interseção qualquer de abertos é aberta.
3. Uma união de dois conjuntos não-abertos é não aberto.
4. O complemento de uma união é igual à união dos complementos.

|    | C | E |
|----|---|---|
| 1. |   |   |
| 2. |   |   |
| 3. |   |   |
| 4. |   |   |

Justifique os itens 1 e 3.

⑥ Prove que  $A$  é aberto em  $X$  se e só se  $\exists G$  (aberto em  $M$ ) tal que  $A = G \cap X$ .

— + —

Duração: duas horas (corridas)

Dê as respostas da parte ⑤ num quadro da forma

|          | aberto | fechado | aberto<br>fechado | nenhum<br>nem aberto<br>nem fechado |
|----------|--------|---------|-------------------|-------------------------------------|
| $\vdots$ |        |         |                   |                                     |
| $i-1$    | X      |         |                   |                                     |
| $i$      |        |         | X                 |                                     |
| $i+1$    |        |         |                   | X                                   |
| $\vdots$ |        |         |                   |                                     |

Em seguida justifique cada afirmativa.