

1. V um espaço vetorial / $\mathbb{R}$

Seja $T: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ bilinear. Diz-se que T é alternada (skew-symmetric) se $T(v, w) = -T(w, v) \quad \forall v, w \in V$

(a) Mostre: T alternada $\Leftrightarrow T(v, v) = 0 \quad \forall v \in V$

(b) Seja $\Lambda^2(V)^* = \{T \text{ alternadas}\}$. Mostre que é um espaço vetorial (operações usuais de funções).

(c) Se φ e ψ são funcionais lineares em V defina

$$\varphi \wedge \psi: V \times V \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{por meio de}$$

$$(\varphi \wedge \psi)(v, w) = \det \begin{pmatrix} \varphi(v) & \varphi(w) \\ \psi(v) & \psi(w) \end{pmatrix}$$

Mostre então $\varphi \wedge \psi \in \Lambda^2(V)^*$.

2. Chama-se uma forma de grau $2 \leq m \leq E^3$ a uma aplicação $\Phi: p \in E^3 \mapsto \varphi_p \in \Lambda^2(T_p E^3)^*$. (a) Mostre que uma tal Φ pode ser escrita

$$\Phi = \sum_{\substack{i < j \\ i, j=1,2,3}} a_{ij} dx_i \wedge dx_j$$

o que significa $\varphi_p = \sum a_{ij}(p) (dx_i)_p \wedge (dx_j)_p$.

(b) Mostre que $\{(dx_i)_p \wedge (dx_j)_p \mid i < j; i, j=1,2,3\}$ são L.I. Conclua por analogia a dimensão do espaço $\Lambda^2(T_p E^n)$.

3. Dê exemplo de uma forma em E^3 tal que $\varphi \wedge \varphi \neq 0$

4. " " " " " " E^4 tal que $\varphi \wedge \varphi \neq 0$

5. Seja p ímpar e φ de grau p . Mostre que $\varphi \wedge \varphi = 0$.

6. Suponha φ de grau p e ψ de grau q . Mostre em E^n que

$$\varphi \wedge \psi = (-1)^{pq} \psi \wedge \varphi.$$

7. Mostre que $d(d\varphi) = 0$ para toda forma φ de E^n

8. Seja ω a forma em E^{2n} definida por

$$\omega = dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4 + \dots + dx_{n-1} \wedge dx_n.$$

Calcule a potência exterior n -ésima de ω .

9. Sejam $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ 1-formas em E^3 . Elas se chamam L.I. em $U \subset E^3$ se $\varphi_1(p), \varphi_2(p), \dots, \varphi_n(p)$ são L.I. em $T_p(E^3)^*$ $\forall p \in U$.