

1. Justifique:

- (a) Todo domínio de integridade finito é corpo.
 (b) Se $u \in N$ onde N é ideal de R e u é inversível (unit) de R , então $N = R$. (R = anel com unidade)

2(a) Ache os inversíveis de $F[x]$, onde F é um corpo.

(b) Ache os ideais de $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$

3. Verifique quais dos polinômios abaixo são irredutíveis (em $\mathbb{Q}[x]$)

(a) $2x^4 - 6x^3 - 18x^2 + 6x + 12$

(b) $5x + 10$

(c) $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 2$

4. Ache todos os irredutíveis de grau 3 em $\mathbb{Z}_3[x]$

5. Se $p(x) \in F[x]$ é um irredutível mostre que $\langle p(x) \rangle$ é maximal

Obs: A recíproca (verdadeira) não está sendo pedida

6. (Responda nos espaços indicados).

Suponha R um anel comutativo com unidade.

(a) Seja N um ideal de R . Dado $a \in R$, defina

$$J_a = \{ ax + y \mid x \in R, y \in N \}$$

mostre, no verso desta página, que:

(a1) J_a é um ideal de R

(a2) $N \subset J_a$ e mais: se $a \notin N$ então $N \not\subset J_a$

(b) (Complete as lacunas)

Se N e J são ideais ^{do R} e $N \not\subset J$ então dizer que N é maximal implica em $J = \dots$, e assim, em $1 \in J$. No caso do item (a2) isto se expressa pondo que $\exists h \in \dots$ e $\exists \dots \in N$ tais que $1 = \dots + y'$. E daí se tira que: dado $a \notin N$ então

existe $\dots \in R$ tal que $1 \in \dots + N$.

(c) Considere a prova de que num anel comutativo com unidade tem-se N maximal $\Rightarrow R/N$ corpo.

A prova correta por afirmar que R/N será também comutativo e com unidade. Justifique a seguir porque isto é verdadeiro; Resposta:

(d) Sendo N maximal haverá o perigo de que R/N seja um anel trivial (isto é, qual $1=0$)?

Resposta:

(e) Sendo N maximal existirá $a \notin N$ em R (Diga aqui porquê:.....)

e então considere o elemento $a+N \neq 0 \in R/N$. Pelo item (c), para mostrar que R/N é corpo resta achar $b+N \in R/N$ tal que $(a+N)(b+N) = 1+N$. Admita então o item (b) como resolvido. Já escolhemos $a \notin N$ e usando o resultado do item (b) temos
... (Complete a demonstração no espaço a seguir).