

Capítulo I - Introdução dos Sistemas Lineares.

Sabemos resolver um sistema de 2 equações lineares (isto é, de 1º grau) com duas incógnitas. Seja por exemplo o sistema

$$(1) \quad \begin{cases} x + 2y = 3 \\ 3x - 5y = -13 \end{cases}$$

que pode ser resolvido por "eliminação" da incógnita x na 2ª equação. Explicitamente, multiplicando a 1ª equação por -3 e somando à 2ª, obtemos

$$-11y = -22 \quad \therefore y = 2.$$

Este valor $y = 2$ deve ser agora substituído na 1ª equação, da qual se conclui então que $x = -1$.

Diz-se que o par ordenado $(-1, 2)$ é uma solução do sistema porque a substituição $x = -1, y = 2$ nas equações dadas fornecem igualdades verdadeiras (no caso $3 = 3$ e $-13 = -13$).

Exercício 1.1 - Verificar se cada par ordenado abaixo é solução do sistema respectivo, sem resolvê-lo

$$(a) \quad \begin{cases} 2x + 3y = 11 \\ x - 2y = 5 \end{cases}, \text{ par } (1, 2); \quad (b) \quad \begin{cases} x - 3y = -7 \\ 2x + y = 0 \end{cases}, \text{ par } (-1, 2);$$

$$(c) \quad \begin{cases} 2x - y = 3 \\ -x + y = -3 \end{cases}, \text{ par } (2, -1); \quad (d) \quad \begin{cases} 5x + y = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases}, \text{ par } (0, 0);$$

$$(e) \quad \begin{cases} x + 2y = 4 \\ 3x + y = 7 \\ x - y = 1 \end{cases}, \text{ par } (2, 1); \quad (f) \quad \begin{cases} 3x + y = 2 \\ -x + 2y = \frac{4}{3} \\ 5x - 3y = 3 \end{cases}, \text{ par } (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$$

Exercício 1.2 - Resolver os sistemas

$$(a) \quad \begin{cases} x - 2y = -2 \\ 5x + 3y = 16 \end{cases}; \quad (b) \quad \begin{cases} 3x - y = 2 \\ x + 4y = 5 \end{cases}; \quad (c) \quad \begin{cases} 3x + y = 2 \\ 2x + 3y = -1 \end{cases}$$

Examinemos mais uma vez a resolução do sistema (1). No sistema dado, a 2ª equação não foi mais usada a partir do momento em que foi obtida a equação $-11y = -22$. Assim sendo, na etapa final estava-se efetivamente resolvendo o novo sistema

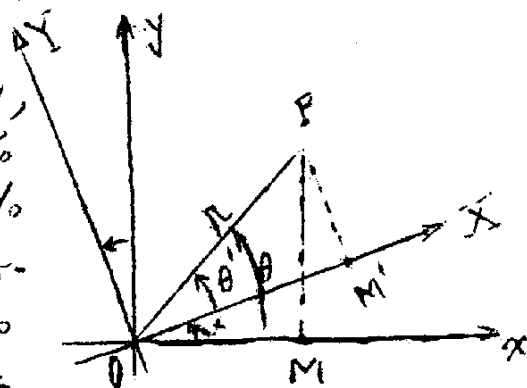
$$(2) \quad \begin{cases} x + 2y = 3 \\ -11y = -22 \end{cases}$$

obtido substituindo-se a 2ª equação por uma "combinação linear" das duas equações. Esta denominação indica que a equação $-11y = -22$ foi obtida mediante multiplicação (dos dois membros) das equações originais por constantes e ainda, por soma (membro a membro) das

Cap. VIII - Rotação de Eixos

Mostraremos agora como uma rotação de eixos pode simplificar a equação de uma curva e como aplicar tal simplificação no reconhecimento de uma cônica, dada sua equação.

Dado o sistema cartesiano xOy , considere o sistema obtido por rotação dos eixos de um ângulo orientado α . Se $OM=x$ e $MP=y$ são as coordenadas de um ponto P em relação ao sistema original, então as novas coordenadas do mesmo ponto, em relação ao novo sistema XOY serão $X=OM'$ e $Y=M'P$. A distância $OP=r$ não se altera mas o ângulo que $\overrightarrow{OP}$ forma com o 1º eixo coordenado passa de θ para θ' e teremos $\theta'=\theta-\alpha$. Assim



$$X = r \cos \theta' = r \cos(\theta - \alpha) = r \cos \theta \cos \alpha + r \sin \theta \sin \alpha$$

$$Y = r \sin \theta' = r \sin(\theta - \alpha) = r \sin \theta \cos \alpha - r \cos \theta \sin \alpha$$

Mas $r \cos \theta = x$ e $r \sin \theta = y$. Então

$$\left. \begin{aligned} X &= x \cos \alpha + y \sin \alpha \\ Y &= y \cos \alpha - x \sin \alpha \end{aligned} \right\}$$

①

Estas serão as fórmulas para transformação das coordenadas.
Exemplo: Seja $P=(1,3)$. Quais serão as coordenadas deste p to se efetuarmos uma rotação de eixos de 45° no sentido horário?

Solução: Tomamos $\alpha = -\frac{\pi}{4}$. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Pelas fórmulas anteriores as novas coordenadas serão

$$\left\{ \begin{aligned} X &= (-1) \frac{\sqrt{2}}{2} + 3 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ Y &= 3 \frac{\sqrt{2}}{2} - (-1) \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \end{aligned} \right. \quad \therefore \left\{ \begin{aligned} X &= -2\sqrt{2} \\ Y &= \sqrt{2} \end{aligned} \right.$$

Exercício 1 - Quais as novas coordenadas se no problema anterior, a rotação de 45° se deu no sentido anti-horário?

Exercício 2 - As coordenadas do ponto $P=(x,y)=(1,-2)$ transformadas mediante rotação de eixos, para $P=(X,Y)$ são...