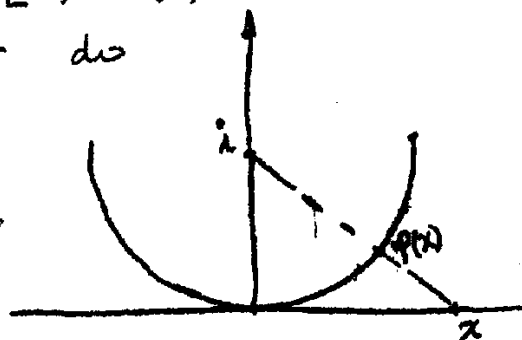


Análise Complexa - 1ª Verificação - Setembro de 1973.

- ①. Sejam $X = \{z \in \mathbb{C} ; z = i + e^{it}, t \in (\pi, 2\pi)\}$
 $X^* = \{z \in \mathbb{C} ; z = i + e^{it}, t \in [\pi, 2\pi]\}$.

e $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow X$ a projecção a partir do ponto $z=i$ (ver figura).

Defina $d(x_1, x_2) = \|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)\|$



a - Mostre que d é uma métrica

Estenda φ a $\mathbb{R}^*$ pondo que

$$\varphi(+\infty) = 1+i \quad \text{e} \quad \varphi(-\infty) = -1+i.$$

b - Mostre que esta extensão é contínua.

- ②. Defina os termos envolvidos na proposição seguinte e demonstre-a com detalhes:

" (f_n) é uniformemente convergente em $E \subset \mathbb{C}$
se e só se $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que
 $m, n \geq n_0$ e $z \in E \Rightarrow |f_n(z) - f_m(z)| < \varepsilon$ ".

- ③. Se R é o raio de convergência de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, qual
é o raio de convergência de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{2n}$ e de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 z^n$?
Justifique!

- ④. Mostre que $e^{2\pi i} = 1$ e que se $0 < t < 2\pi$ en-
tão $e^{ti} \neq 1$.

- ⑤. Descreva a superfície de Riemann de $\sqrt{z}$.